

RADYAL YÖNDE BASINÇ UYGULANAN KONSENTRİK UZUN TÜPLERDE VON MISES KRİTERİNE GÖRE AKMANIN BAŞLAMASI

Tolga AKIŞ* ve **Ahmet N. ERASLAN****

*İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Atılım Üniversitesi, İncek 06836, Ankara
takis@atilim.edu.tr

**Mühendislik Bilimleri Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 06531, Ankara
aceraslan@metu.edu.tr

(Geliş/Received: 29.03.2004; Kabul/Accepted: 30.05.2005)

ÖZET

İç ya da dış yüzeyden radyal yönde basınçlandırılmış düzlemsel şekil değiştiren klasik tüp problemi iç içe geçmiş, aksiyel yönde sabitlenmiş uzun konsentrik tüplere uyarlanmıştır. Von Mises akma kriteri kullanılarak, plastik akmanın başladığı kritik basınç değerleri, malzeme özellikleri ve tüp boyutları cinsinden elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gerilme analizi, elastisite, konsentrik tüpler, von Mises kriteri.

YIELDING OF LONG CONCENTRIC TUBES UNDER RADIAL PRESSURE BASED ON VON MISES CRITERION

ABSTRACT

The classical problem of a plain strain tube with free ends, subject to either internal or external pressure is extended to tightly fitted long concentric tubes with axially constrained ends. Making use of von Mises yield criterion, critical values of pressure leading to plastic flow are determined in terms of material properties and tube dimensions.

Keywords: Stress analysis, elasticity, concentric tubes, von Mises criterion.

1. GİRİŞ

Mühendislikte yaygınlıkla kullanılan çubuk, tüp, içi boş disk, küresel kabuk gibi temel elemanların farklı yükleme ve sınır koşulları altında deformasyon analizi ayrı bir önem taşımaktadır [1]. Radyal yönde iç ya da dış yüzeyden basınç uygulanan ve düzlemsel şekil değiştiren kalın cidarlı uzun tüp problemi Timoshenko [1], Timoshenko ve Goodier [2], Uğural ve Fenster [3], Boresi, Schmidt ve Sidebottom [4] tarafından elastik gerilme durumu, Nadai [5] ve Boresi, Schmidt ve Sidebottom [4] tarafından tamamen plastik gerilme durumu ve Parker [6] ve Perry ve Aboudi [7] tarafından elastik-plastik gerilme durumu göz önüne alınarak analiz edilmiştir. Bu çalışmada, söz konusu problem, iç içe geçmiş iki tabakalı eksenel şekil değiştirmenin engellendiği tüplere uyarlanmaktadır. Elastik gerilme ve izotropik malzeme durumu göz önüne alınmıştır.

İç çapı a ve dış çapı b olan uzun bir tüp, iç çapı b ve dış çapı c olan aynı uzunlukta başka bir tüp içerisine yerleştirilir ve aksiyel yönde sabitlenir. Sistem ilk anda gerilmeksizdir, daha sonra iç ya da dış yüzeyden basınç uygulanmasıyla birlikte içerisinde radyal, teğetsel ve aksiyel yönlerde gerilmeler oluşacaktır. Bu gerilmelerin hesabı ve elastik aralığın belirlenmesi bu çalışmanın amacını oluşturmaktadır. Tek tüp için elde edilen analitik çözüm, uygun sınır ve süreklilik koşulları yardımıyla, konsentrik sisteme uygulanarak her iki tüp için gerilme ve yer değiştirme dağılımları kapalı formda elde edilecektir. Gerçek malzeme özellikleri kullanılarak, gerilme denklemleri ve von Mises akma kriteri yardımıyla plastik deformasyona yol açan kritik basınç değerleri hesaplanacaktır.

2. TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM

Konsentrik tüp sisteminin düzlemsel şekil değiştirdiği ve basınç altında oluşan şekil değiştirmelerin küçük

olduğu varsayılmaktadır. Giriş bölümünde belirtildiği gibi, sözkonusu tüpler uzun olup, yapılan analiz uçlardan uzak kesitlerde geçerlidir. Ayrıca, Timoshenko ve Goodier [2] notasyonu kullanılacaktır. Silindirik koordinat sisteminde küçük deformasyonlar için şekil-yer değiştirme bağıntıları, Hooke yasası ve gerilme-yer değiştirme bağıntıları temel denklemleri oluşturur [2]. Düzlemsel şekil değiştirme durumunda $\varepsilon_z = 0$ olduğu göz önüne alınarak tek bir tüp için elastik çözüm,

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r \quad (1)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1+\nu} \left[-\frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{1-2\nu} \right] \quad (2)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{1-2\nu} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{2\nu E C_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4)$$

olarak bulunur. Burada C_1 ve C_2 integrasyon sabitleridir. Eksenel şekil değiştirmenin engellenmediği elastik gerilme durumunda $\sigma_z = 0$ olur [2, 3] (Ek-1). Ancak, yukarıdaki denklemden (4) anlaşıldığı gibi, eksenel yönde şekil değiştirmeyen tüpte $\sigma_z = \text{sabit}$ dir ve bu durum buradaki çözümü farklı kılmaktadır.

İç yüzeyden basınç uygulanan tek bir tüp için C_1 ve C_2 integrasyon sabitlerinin belirlenmesinde, $\sigma_r(a) = -P$ ve $\sigma_r(b) = 0$ sınır koşulları kullanılır. Buna göre integrasyon sabitleri,

$$C_1 = \frac{a^2 b^2 P (1+\nu)}{(b^2 - a^2) E} \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{a^2 P (1+\nu)(1-2\nu)}{(b^2 - a^2) E} \quad (6)$$

olarak bulunur. Dış basınç altındaki tüpte ise sınır koşulları $\sigma_r(a) = 0$ ve $\sigma_r(b) = -P$ şeklindedir. Bu durum için integrasyon sabitleri ise,

$$C_1 = -\frac{a^2 b^2 P (1+\nu)}{(b^2 - a^2) E} \quad (7)$$

$$C_2 = -\frac{b^2 P (1+\nu)(1-2\nu)}{(b^2 - a^2) E} \quad (8)$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan, düzlem şekil değiştirme durumu için deviyatorik gerilme tensörü S_{ij} ,

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_r - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad (9)$$

halini alır. Burada $\bar{\sigma}$ hidrostatik gerilme olup, diğer gerilmeler yardımıyla $\bar{\sigma} = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3$ olarak verilir. Von Mises akma gerilmesi σ_Y , deviyatorik gerilme tensörü S_{ij} cinsinden,

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (10)$$

şeklinde ifade edilir [8]. Gerekli indis toplamları yapılarak, düzlem şekil değiştirme hali için von Mises akma gerilmesi,

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2]} \quad (11)$$

olarak hesaplanır. Bu denklem kullanılarak elde edilen akma gerilmesinin $\sigma_Y > \sigma_0$ olduğu basınçta akma başlar ve elastik limit basınç değeri $\sigma_Y = \sigma_0$ denliğinden hesaplanır. Burada σ_0 malzeme akma gerilmesinin başlangıç değerini ifade etmektedir. Yapılan çalışmalar tek tüp için her iki basınç durumunda da iç yüzeyin kritik olduğunu ve plastik akmanın bu yüzeyden başlayacağını göstermiştir.

Elde edilen integrasyon sabitlerinin (2), (3) ve (4) denklemlerinde yerlerine yazılmasıyla bulunan gerilme bileşenlerinin iç yüzey $r = a$ daki değerleri (11) denkleminde yerleştirildiğinde iç basınç durumu için,

$$\bar{P}_e = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{3b^4 + a^4(1-2\nu)^2}} \quad (12)$$

dış basınç durumu için ise,

$$\bar{P}_e = \frac{b^2 - a^2}{2b^2 \sqrt{1-\nu(1-\nu)}} \quad (13)$$

boyutsuz kritik basınç ifadeleri elde edilir. Boyutsuz kritik basınç $\bar{P}_e = P_e / \sigma_0$ şeklinde tanımlanmıştır. İç içe geçmiş iki tüp için de, sınır koşulları ve integrasyon sabitleri farklı olmak üzere, benzer gerilme ve yer değiştirme ifadeleri geçerlidir. Aşağıda, iç ve dış basınç altındaki kompozit tüplerin çözümleri verilmektedir.

2.1. İç Basınç Altındaki Tüpler

Eksenel yönde şekil değiştirmeyen iki tabakalı kompozit tüpte, iç yüzeyden uygulanan basınç altında oluşan radyal yer değiştirme ve radyal, teğetsel ve simetri eksenine doğrultusundaki gerilme bileşenleri, (1), (2), (3) ve (4) denklemleriyle hesaplanabilir. Bu durumda sınır koşulları $\sigma_r^I(a) = -P$ ve $\sigma_r^{II}(c) = 0$ şeklindedir. Burada σ_r^I ve σ_r^{II} sırasıyla birinci ve

ikinci tüp için radyal gerilme bileşenlerini ifade etmektedir. Sınır koşullarına ek olarak, iki ayrı süreklilik koşulu da $\sigma_r^I(b) = \sigma_r^{II}(b)$ ve $u^I(b) = u^{II}(b)$ şeklinde yazılabilir.

Sınır ve süreklilik koşullarının radyal gerilme bileşeni ve yer değiştirme ifadelerinde yerine yazılmasıyla yapılan hesaplamalarda, her iki tüp için integrasyon sabitleri,

$$C_1 E_1 = \frac{a^2 b^2 P N_1 \left[\frac{b^2 (E_1 M_2 - E_2 M_1)}{+ c^2 (E_1 N_2 + E_2 M_1)} \right]}{\left[\frac{E_1 (b^2 - a^2) (b^2 M_2 + c^2 N_2)}{+ E_2 (c^2 - b^2) (a^2 N_1 + b^2 M_1)} \right]} \quad (14)$$

$$C_2 E_1 = \frac{a^2 P M_1 \left[\frac{b^2 (E_1 M_2 + E_2 N_1)}{+ c^2 (E_1 N_2 - E_2 N_1)} \right]}{\left[\frac{E_1 (b^2 - a^2) (b^2 M_2 + c^2 N_2)}{+ E_2 (c^2 - b^2) (a^2 N_1 + b^2 M_1)} \right]} \quad (15)$$

$$C_3 = \frac{a^2 b^2 c^2 P N_2 (M_1 + N_1)}{\left[\frac{E_1 (b^2 - a^2) (b^2 M_2 + c^2 N_2)}{+ E_2 (c^2 - b^2) (a^2 N_1 + b^2 M_1)} \right]} \quad (16)$$

$$C_4 = \frac{a^2 b^2 P M_2 (M_1 + N_1)}{\left[\frac{E_1 (b^2 - a^2) (b^2 M_2 + c^2 N_2)}{+ E_2 (c^2 - b^2) (a^2 N_1 + b^2 M_1)} \right]} \quad (17)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerdeki C_1 ve C_2 iç tüpe ait integral sabitleri, C_3 ve C_4 ise dış tüpe ait integrasyon sabitleridir. Aynı şekilde, E_1 ve E_2 iç ve dış tüplerin elastisite modüllerini, ν_1 ve ν_2 ise Poisson oranlarını ifade etmektedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 + \nu_1, \quad M_1 = N_1(1 - 2\nu_1), \\ N_2 &= 1 + \nu_2, \quad M_2 = N_2(1 - 2\nu_2) \end{aligned} \quad (18)$$

tanımları yapılmıştır. Tek tüpün aksine, kompozit tüplerde kullanılan malzeme özellikleri (E , ν , σ_0) ve tüp boyutlarına (a , b) bağlı olarak üç ayrı plastik akma durumu söz konusudur. Bunlar akmanın: (1) her iki tüpte aynı anda başlaması, (2) dış tüpün iç yüzeyinde başlaması ve (3) iç tüpün iç yüzeyinde başlaması durumlarıdır. Plastik akmanın her iki tüpte aynı anda başlamasına neden olan kritik arayüz koordinatı $b = b_{cr}$ ve buna karşılık gelen elastik limit basınç değeri $P = P_e$,

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[\sigma_r^I(a) - \sigma_\theta^I(a) \right]^2 + \left[\sigma_r^I(a) - \sigma_z^I(a) \right]^2 \right\} + \left[\sigma_\theta^I(a) - \sigma_z^I(a) \right]^2} = \sigma_{01} \quad (19)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[\sigma_r^{II}(b_{cr}) - \sigma_\theta^{II}(b_{cr}) \right]^2 + \left[\sigma_r^{II}(b_{cr}) - \sigma_z^{II}(b_{cr}) \right]^2 \right\} + \left[\sigma_\theta^{II}(b_{cr}) - \sigma_z^{II}(b_{cr}) \right]^2} = \sigma_{02} \quad (20)$$

denkliklerinin simultane çözümünü elde edilebilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\frac{a^4 E_2^2 N_1^2 (M_1 + N_1)^2 (b_{cr}^4 M_2^2 + 3c^4 N_2^2)}{(a^4 + 3b_{cr}^4)(b_{cr}^2 - c^2)^2 E_2^2 M_1^2 N_1^2 N_2^2 + F} = \left(\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} \right)^2 \quad (21)$$

$$P_e = \frac{\left[\sigma_{02} E_1 (b^2 - a^2) (b^2 M_2 + c^2 N_2) + \sigma_{02} E_2 (c^2 - b^2) (b^2 M_1 + a^2 N_1) \right]}{a^2 E_2 (M_1 + N_1) \sqrt{3c^4 + b^4 (1 - 2\nu_2)^2}} \quad (22)$$

ifadeleri bulunur. (21) denkliğinde F

$$F = \left[\begin{aligned} &2(b_{cr}^2 - c^2) E_1 E_2 M_1 N_1 (a^4 M_1 - 3b_{cr}^4 N_1) \\ &\times N_2^2 (b_{cr}^2 M_2 + c^2 N_2) \\ &+ E_1^2 (a^4 M_1^2 + 3b_{cr}^4 N_1^2) N_2^2 (b_{cr}^2 M_2 + c^2 N_2)^2 \end{aligned} \right] \quad (23)$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer bir kritik arayüz söz konusu ise, bunun sayısal değeri (21) denkleminde Newton iterasyon yöntemiyle hesaplanabilir. Bu denklemin 8 kökü olmakla birlikte $[a, c]$ aralığında sadece bir reel kökü vardır ve bu kritik arayüz koordinatıdır. Yukarıda ifade edildiği gibi, b_{cr} nin mevcut olup olmaması büyük ölçüde malzeme özelliklerine bağlıdır. Örneğin içi çelik, dışı alüminyum olan konsentrik sistemde b_{cr} mevcut iken, içi alüminyum dışı çelik olan bir yapıda bu kritik çap mevcut değildir ve plastik akmanın başlaması daima tek tüpte olduğu gibidir. Bu konu sonuçlar bölümünde yeniden daha detaylı tartışılacaktır.

Akmanın iç tüpün iç yüzeyinde başlaması durumunda, (19) denklemini P için çözerek,

$$P_e = \frac{\sigma_{01} N_1 \left[(b^2 - a^2) (b^2 M_2 + c^2 N_2) E_1 + (c^2 - b^2) (a^2 N_1 + b^2 M_1) E_2 \right]}{\sqrt{D}} \quad (24)$$

elastik limit değeri elde edilir. Paydadaki D ,

$$\begin{aligned}
D = & (a^4 + 3b^4)(b^2 - c^2)^2 M_1^2 N_1^2 E_2^2 \\
& + 2(a^4 M_1 - 3b^4 N_1)(b^2 - c^2) \\
& \times (b^2 M_2 + c^2 N_2) M_1 N_1 E_1 E_2 \\
& + (a^4 M_1^2 + 3b^4 N_1^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2)^2 E_1^2
\end{aligned} \quad (25)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Kritik arayüz koordinatı mevcut olan bir malzeme ikilisinde akma, $b < b_{cr}$ seçilirse dış tüpün iç yüzeyinden, $b = b_{cr}$ seçilirse her iki tüpte aynı anda iç yüzeylerden ve $b > b_{cr}$ seçilirse iç tüpün iç yüzeyinden başlayacaktır. Her üç durum için de gerekli elastik limit basınç ifadeleri yukarıda türetilmiştir. Ayrıca gerekli sadeleştirmeler yapılsa bu ifadelerin $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ve $c = b$ alınarak iç basınç altındaki tek tüp ifadelerine indirildiği kolaylıkla görülebilir.

2.2. Dış Basınç Altındaki Tüpler

İç basınç durumunda olduğu gibi, dış basınç altındaki tüplerde oluşan radyal yer değiştirme ve radyal, teğetsel ve simetri eksenli doğrultusundaki gerilme bileşenleri, (1), (2), (3) ve (4) denklemleriyle hesaplanır. Geçerli sınır koşulları $\sigma_r^I(a) = 0$ ve $\sigma_r^{II}(c) = -P$ şeklindedir.

İç basınç durumu için geçerli süreklilik koşulları bu durum için de geçerlidir. Sınır ve süreklilik koşullarının radyal gerilme bileşeni ve yer değiştirme ifadelerinde yerine yazılmasıyla yapılan hesaplamalarda, her iki tüp için integrasyon sabitleri,

$$C_1 = \frac{a^2 b^2 c^2 P N_1 (M_2 + N_2)}{\left[E_1 (a^2 - b^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2) + E_2 (b^2 - c^2)(a^2 N_1 + b^2 M_1) \right]} \quad (26)$$

$$C_2 = \frac{b^2 c^2 P M_1 (M_2 + N_2)}{\left[E_1 (a^2 - b^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2) + E_2 (b^2 - c^2)(a^2 N_1 + b^2 M_1) \right]} \quad (27)$$

$$C_3 E_2 = \frac{b^2 c^2 P N_2 \left[a^2 (E_1 M_2 + E_2 N_1) + b^2 (E_2 M_1 - E_1 M_2) \right]}{\left[E_1 (a^2 - b^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2) + E_2 (b^2 - c^2)(a^2 N_1 + b^2 M_1) \right]} \quad (28)$$

$$C_4 E_2 = \frac{c^2 P M_2 \left[a^2 (E_2 N_1 - E_1 N_2) + b^2 (E_1 N_2 + E_2 M_1) \right]}{\left[E_1 (a^2 - b^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2) + E_2 (b^2 - c^2)(a^2 N_1 + b^2 M_1) \right]} \quad (29)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda kritik arayüz koordinatı ve buna karşılık gelen elastik limit basınç için,

$$\left[\frac{(a^2 - b_{cr}^2) E_1 E_2 M_2 (b_{cr}^2 M_1 + a^2 N_1)}{2b_{cr}^4 E_1^2 (1 - \nu_1 + \nu_1^2) N_2 (M_2 + N_2)^2} + G \right] = \left(\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} \right)^2 \quad (30)$$

$$P_e = \frac{\left[\sigma_{02} E_1 (b^2 - a^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2) + \sigma_{02} E_2 (c^2 - b^2)(b^2 M_1 + a^2 N_1) \right]}{c^2 \sqrt{\left[4(a^2 - b^2)^2 E_1^2 M_2^2 + 4E_2^2 (1 - \nu_2 + \nu_2^2) \right] \times (b^2 M_1 + a^2 N_1)^2 + K}} \quad (31)$$

ifadeleri elde edilir. Bu denklemlerde,

$$G = 2(a^2 - b_{cr}^2)^2 E_1^2 M_2^2 N_2 + 2E_2^2 (1 - \nu_2 + \nu_2^2) \times (b_{cr}^2 M_1 + a^2 N_1)^2 N_2 \quad (32)$$

$$K = 2(a^2 - b^2) E_1 E_2 (1 - 2\nu_2)(b^2 M_1 + a^2 N_1) \times (3N_2 - M_2) \quad (33)$$

tanımları kullanılmıştır. Akmanın iç tüpün iç yüzeyinden başlaması durumunda ise elastik limit,

$$P_e = \frac{\left[\sigma_{01} (b^2 - a^2)(b^2 M_2 + c^2 N_2) E_1 + \sigma_{01} (b^2 - c^2)(a^2 N_1 + b^2 M_1) E_2 \right]}{2b^2 c^2 (M_2 + N_2) E_1 \sqrt{1 - \nu_1 (1 - \nu_1)}} \quad (34)$$

olarak hesaplanır. Bu denklemler de $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ve $c = b$ alınmasıyla, dış basınç altındaki tek tüp ifadelerine indirgenebilir.

3. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, elde edilen sonuçlar sunulurken gerilme için $\bar{\sigma}_j = \sigma_j / \sigma_{01}$, yer değiştirme için $\bar{u} = u E_1 / c \sigma_{01}$ ve basınç için ise $\bar{P} = P / \sigma_{01}$ boyutsuz büyüklükleri kullanılacaktır. İncelenen kompozit tüplerde kullanılan bakır (CU) ve pirincin (BR) mekanik özellikleri aşağıda verilmektedir [3].

$$\begin{aligned}
E_{CU} &= 120 \text{ GPa} & E_{BR} &= 105 \text{ GPa} \\
\nu_{CU} &= 0.364 & \nu_{BR} &= 0.350 \\
(\sigma_0)_{CU} &= 265 \text{ MPa} & (\sigma_0)_{BR} &= 410 \text{ MPa}
\end{aligned}$$

3.1. İç Basınç Durumu

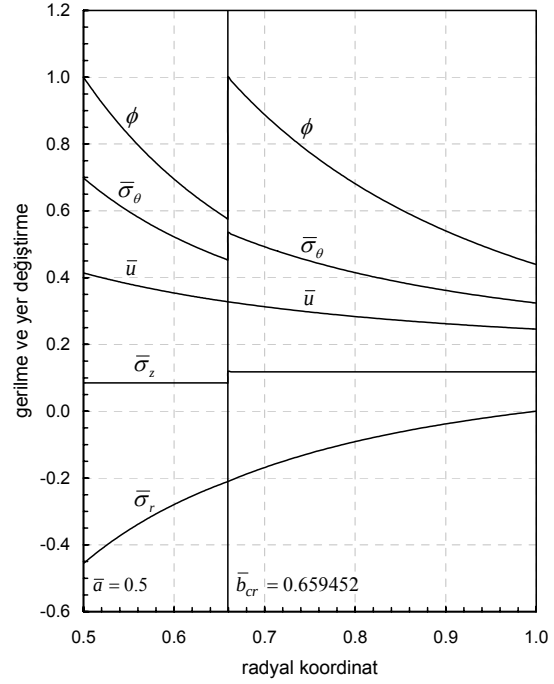
İç yarıçapı $\bar{a} = a/c = 0.5$ ve iç yüzeyinden basınç uygulanan içi pirinç (BR) dışı bakır (CU) olan kompozit tüp göz önüne alınmaktadır. Bu sistemin kritik arayüzü mevcut olup, sayısal değeri, (21) denkleminde iterasyon yöntemiyle $\bar{b}_{cr} = b_{cr}/c = 0.659452$ olarak hesaplanır. Bu çapa karşılık gelen elastik limit basınç ise, (22) eşitliği kullanılarak $\bar{P}_e = 0.455678$ bulunur. Bu değerler ve $\bar{a} = 0.5$, $\bar{c} = 1$ kullanılarak, (14)–(17) denklemleri yardımıyla integrasyon sabitleri hesaplandığında, boyutsuz formda $\bar{C}_1 = C_1/c^2 = 7.60362 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_2 = C_2 = 1.91812 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_3 = C_3/c^2 = 7.54527 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_4 = C_4 = 2.05231 \times 10^{-4}$ sonuçları elde edilir. Bu koşullar altında elde edilen yer değiştirme ve gerilme dağılımları Şekil 1'de verilmiştir. Şekil 1'de gösterilen ϕ boyutsuz gerilme değişkeni aşağıdaki denklemden hesaplanmıştır.

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}[(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)^2 + (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)^2]} \quad (35)$$

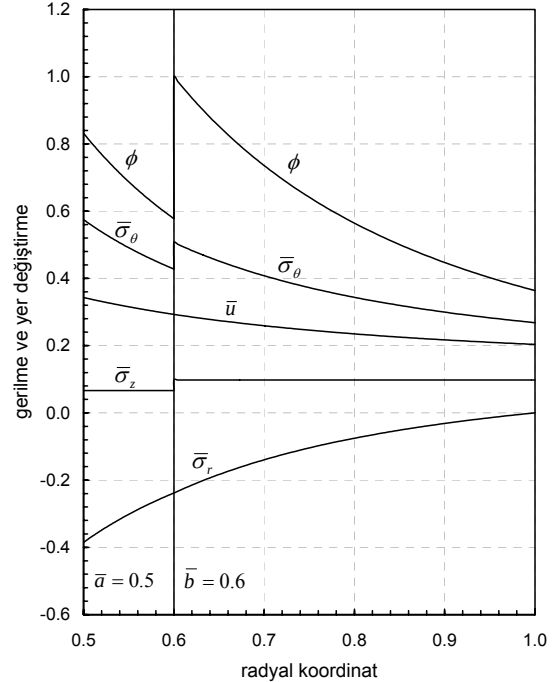
Böylece, $\phi > 1$ olduğunda ϕ gerilme değişkeni akma gerilmesine eşit olmaktadır. Ayrıca $\phi = 1$ olduğunda akma başlar. Şekil 1'de görüldüğü gibi akma her iki tüpte iç yüzeylerde aynı anda başlamıştır. Ayrıca, yukarıda hesaplanan değerlerle sınır ve arayüz koşullarının mükemmel bir şekilde sağlandığı görülmektedir. İç basınç altında deformasyona uğrayan kompozit sistemde teğetsel ve aksiyel gerilme bileşenleri pozitif (çekme modu) olmaktadır.

Aynı malzemeler için $\bar{b} = 0.6 < \bar{b}_{cr}$ alınırsa, (22) ve (14)–(17) denklemleri kullanılarak $\bar{P}_e = 0.385055$, $\bar{C}_1 = 6.32327 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_2 = 1.49856 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_3 = 6.25069 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_4 = 1.70019 \times 10^{-4}$ değerleri elde edilir. Karşılık gelen gerilme ve yer değiştirme dağılımları Şekil 2'de verilmektedir. Bu grafikte gerilme değişkeni ϕ takip edilirse $\phi(b) = 1$ olduğu, yani akmanın arayüzden başladığı görülür.

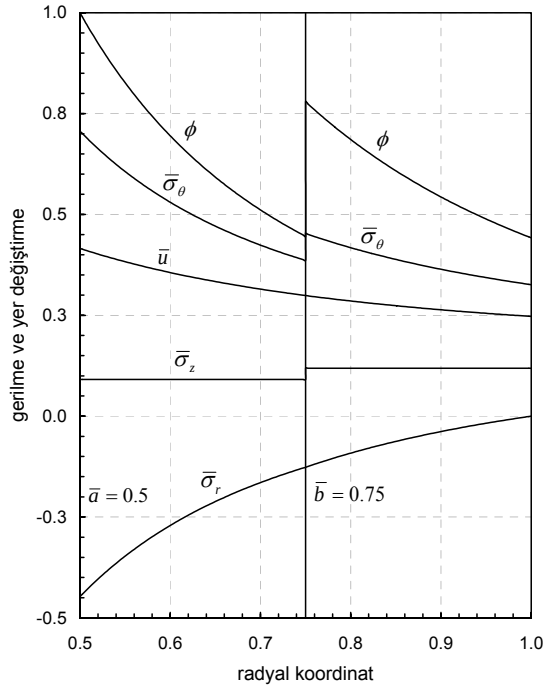
Son olarak $\bar{b} = 0.75 > \bar{b}_{cr}$ seçilerek, (24) ve (14)–(17) denklemleri yardımıyla $\bar{P}_e = 0.447252$, $\bar{C}_1 = 7.60289 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_2 = 2.05050 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_3 = 7.59436 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_4 = 2.06567 \times 10^{-4}$ elde edilir. Bu değerler kullanılarak hesaplanan yer değiştirme ve gerilme dağılımları Şekil 3'de gösterilmektedir. Bu durumda akma iç tüpün iç yüzeyinde başlamıştır.



Şekil 1. İçi pirinç dışı bakır kompozit tüp için $\bar{P}_e = 0.455678$ iç basınç değerinde yer değiştirme ve gerilmeler



Şekil 2. İçi pirinç dışı bakır kompozit tüp için $\bar{P}_e = 0.385055$ iç basınç değerinde yer değiştirme ve gerilmeler



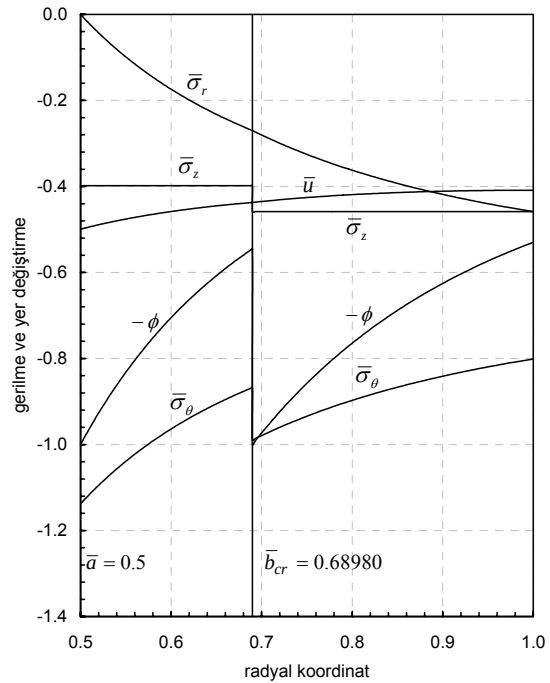
Şekil 3. İçi pirinç dışı bakır kompozit tüp için $\bar{P}_e = 0.447252$ iç basınç değerinde yer değiştirme ve gerilmeler

Yukarıda değişik arayüz değerleri için hesaplanan elastik limit basınç değerleri karşılaştırılırsa bunların küçükten büyüğe $P_e(b = 0.6) < P_e(b = 0.75) < P_e(b = b_{cr})$ şeklinde sıralandıkları anlaşılır. En yüksek basınç, plastik deformasyonu aynı anda her iki tüpte başlatmak için gerekmektedir. Eğer b_{cr} mevcut ise $b = b_{cr}$ alınarak yapılan tasarım elastik deformasyon aralığı en büyük olan tasarımdır.

Kritik arayüz çapının varlığının malzeme özellikleri (E, ν, σ_0) ve tüp boyutlarına (a/c) nasıl bağlı olduğunu belirli ölçüde aydınlatabilmek için bir parametrik analiz gerçekleştirilmiştir. Bunun için her iki tüpte kullanılan malzemelerin iki özelliğinin aynı, yalnızca birinin farklı olduğu durumlar ele alınmıştır. $\nu_1 = \nu_2$ ve $\sigma_{01} = \sigma_{02}$ kabul edildiğinde, eğer elastisite modülleri $E_1 > E_2$ eşitsizliğini sağlıyorsa b_{cr} her iç çap a/c için mevcuttur. $E_1 < E_2$ ise a/c ne olursa olsun b_{cr} yoktur. Aynı şekilde, diğer iki özellik aynı olduğunda, $\sigma_{01} < \sigma_{02}$ koşulu sağlanıyorsa kritik yarıçap vardır. Poisson oranlarının (ν_1 ve ν_2) b_{cr} değerinin varlığı üzerine etkisi ise iç yarıçap a/c nin değerine bağlı bulunmuştur. Bu durumda bir kritik iç çap a/c söz konusu olmaktadır. Bu kritik iç çap değerinin bir tarafında $\nu_1 > \nu_2$, diğer tarafında ise $\nu_1 < \nu_2$ koşullarının sağlanması gerekmektedir.

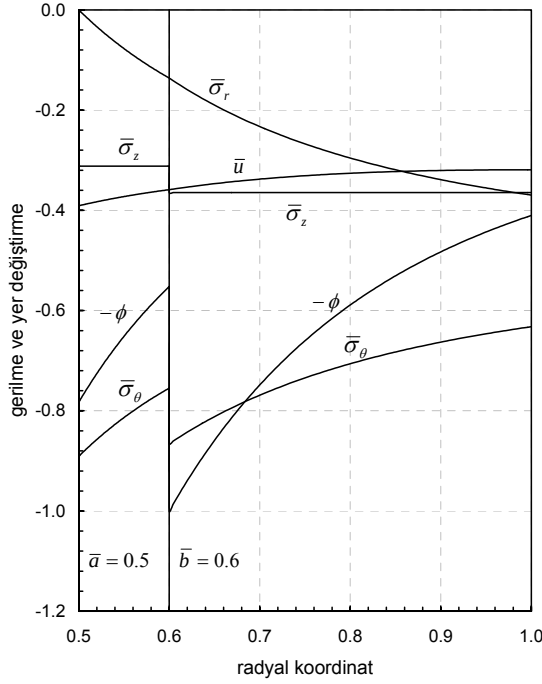
3.2. Dış Basınç Durumu

Bu bölümde içi pirinç (BR), dışı bakır (CU) ve iç yarıçapı $\bar{a} = 0.5$ olan kompozit sistemin dış yüzeyinden radyal yönde basınç uygulandığında elastik davranışı incelenecektir. Bu sistem için kritik arayüz çapı ve elastik limit basınç, sırasıyla (30) ve (31) nolu denklemlerden $\bar{b}_{cr} = 0.689800$ ve $\bar{P}_e = 0.458597$ olarak belirlenir. Bu durumda boyutsuz integrasyon sabitleri (26)-(29) denklemleri yardımıyla $\bar{C}_1 = -7.49703 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_2 = -8.99643 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_3 = -7.97900 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_4 = -7.98351 \times 10^{-4}$ bulunur. Bu basıncın yol açtığı yer değiştirme ve gerilme dağılımları Şekil 4'de verilmektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi, iç basınç durumundan farklı olarak, dış basınç altındaki kompozit sistemde tüm gerilme bileşenleri negatif (basma modu) olmaktadır. Bu nedenle gerilme değişkeni ϕ işareti değiştirilerek çizilmiştir. ϕ nin değişimi izlenerek, akmanın her iki tüpte de aynı anda başladığı görülür.



Şekil 4. İçi pirinç dışı bakır kompozit tüp için $\bar{P}_e = 0.458597$ dış basınç değerinde yer değiştirme ve gerilmeler

Arayüz çapı $\bar{b} = 0.6 < \bar{b}_{cr}$ alındığında, (31) ve (26)-(29) denklemleri kullanılarak $\bar{P}_e = 0.369559$, $\bar{C}_1 = -5.86992 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_2 = -7.04391 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_3 = -6.12001 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_4 = -6.34921 \times 10^{-4}$ sonuçları elde edilir. Bu değerlere karşılık gelen yer değiştirme ve gerilme dağılımları Şekil 5'de gösterilmiştir. Akma dış tüpün iç yüzeyinden, yani arayüzden başlamıştır.

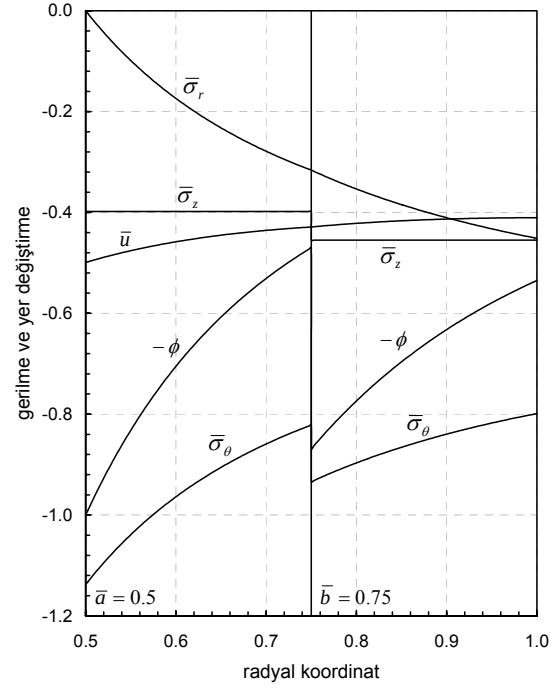


Şekil 5. İçi pirinç dışı bakır kompozit tüp için $\bar{P}_e = 0.369559$ dış basınç değerinde yer değiştirme ve gerilmeler

$\bar{b} = 0.75 > \bar{b}_{cr}$ seçilerek, elastik limit basınç (34) denkleminde $\bar{P}_e = 0.451239$ olarak elde edilir. Bu basınçta boyutsuz integrasyon sabitleri ise $\bar{C}_1 = -7.49703 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_2 = -8.99644 \times 10^{-4}$, $\bar{C}_3 = -8.10065 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_4 = -7.92333 \times 10^{-4}$ değerlerini alırlar. Buna göre yer değiştirme ve gerilme dağılımları hesaplanırsa Şekil 6'da gösterilen grafik elde edilir. Bu şekilden görüldüğü gibi bu durumda akma iç tüpün iç yüzeyinde başlamıştır.

İç basınç durumunda yapıldığı gibi her üç değişik akma durumu için gerekli olan elastik limit basınç değerleri karşılaştırılırsa, en yüksek olanının akmanın her iki tüpte aynı anda başlamasını sağlayan kritik basınç değeri olduğu anlaşılır. $b = b_{cr}$ seçilmesi sistemin mukavemetini belirli ölçüde arttırmaktadır, diğer bir deyimle balans tasarım sağlamaktadır.

Dış basınç altındaki kompozit tüplerde iç basınç durumunda olduğu gibi $E_1 > E_2$ ve $\sigma_{01} < \sigma_{02}$ koşullarında kritik arayüz çapı vardır. İç basınç durumundan farklı olarak, Poisson oranlarının kritik yarıçap varlığına etkisinin iç yarıçap a/c nin değerinden bağımsız olduğu gözlenmiştir. Diğer malzeme özellikleri aynı kabul edildiğinde, $\nu_1 < \nu_2$ koşulu sağlanırsa kritik arayüz b_{cr} mevcuttur.



Şekil 6. İçi pirinç dışı bakır kompozit tüp için $\bar{P}_e = 0.451239$ dış basınç değerinde yer değiştirme ve gerilmeler

4. SONUÇ

Bu çalışmada, daha önce eksenel şekil değiştirmenin engellenmediği kabul edilerek çözülmüş iç veya dış basınç altındaki tüp problemi, iç içe geçmiş uçları kapalı iki tüpten oluşan kompozit sisteme uyarlanmıştır. Sistemin iç ve dış basınç altında akma limitleri von Mises akma kriterine göre analitik olarak bulunmuştur. Von Mises akma kriterinin birçok basit yükleme koşullarında gerçekçi sonuçlar verdiği bilinmektedir [4]. Ancak bu kriterin Tresca kriteri gibi yaygınlıkla kullanılmayışının nedeni nonlineer olmasından kaynaklanmaktadır. Radyal yönde uygulanan basınç altında, konsentrik tüplerin plastik akma davranışının tek bir tüpün davranışından oldukça farklı olduğu gösterilmiştir. Akma iç ve arayüz olmak üzere değişik yerlerden başlayabilmekle birlikte, her iki tüpün iç yüzeylerinde aynı anda başlayabilmektedir. Bunun koşulları araştırılmış ve plastik deformasyonun her iki tüpte aynı anda başlayabilmesi için gerekli kritik arayüz çap değeri belirlenmiştir. Bu kritik çap değerinin varlığının önemli ölçüde içte ve dışta kullanılan tüplerin malzeme özelliklerine bağlı olduğu belirlenmiştir.

EK-1

Eksenel şekil değiştirmenin engellenmediği elastik gerilme durumunda $\varepsilon_z = \varepsilon_0 = \text{sabit}$ olur, ve Hooke yasası yardımıyla aksiyel gerilme bileşeni σ_z için,

$$\sigma_z = E\varepsilon_0 + \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (36)$$

ifadesi bulunur. Böylece, gerilme-yer değiştirme bağıntıları,

$$\sigma_r = \frac{E}{r(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(r\varepsilon_0 + u)\nu + r(1-\nu)\frac{du}{dr} \right] \quad (37)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{r(1+\nu)(1-2\nu)} \left[r\varepsilon_0\nu + (1-\nu)u + r\nu\frac{du}{dr} \right] \quad (38)$$

halini alır. Radyal yönde yer değiştirme $u(r)$ cinsinden ifade edilen gerilme bileşenleri, denge denklemi yerlerine yazıldığında gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0 \quad (39)$$

alırsak Cauchy-Euler diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü, ve sırasıyla, (37), (38) ve (36) denklıkları yardımıyla, gerilmeler,

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)} \left[-\frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{1-2\nu} + \frac{\nu\varepsilon_0}{1-2\nu} \right] \quad (40)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{1-2\nu} + \frac{\nu\varepsilon_0}{1-2\nu} \right] \quad (41)$$

$$\sigma_z = \frac{E[2\nu C_2 + (1-\nu)\varepsilon_0]}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (42)$$

olarak bulunur. Aksiyel yönde uzama engellenmediği için, bu yönde uygulanan kuvvet F_z sıfırdır. Bu durum matematiksel olarak,

$$F_z = \int_a^b r \sigma_z(r) dr = 0 \quad (43)$$

denkliğinin sağlanmasını gerektirir. İç basınç durumunda (43) denkliğine ek olarak $\sigma_r(a) = -P$ ve $\sigma_r(b) = 0$ sınır koşulları geçerlidir. Bu üç denklemin birlikte çözümü ile,

$$C_1 = \frac{a^2 b^2 P(1+\nu)}{(b^2 - a^2)E} ; \quad C_2 = \frac{a^2 P(1-\nu)}{(b^2 - a^2)E} ; \quad (44)$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{2a^2 P \nu}{(b^2 - a^2)E}$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan ifadeler (42) denkliğinde yerine yerleştirildiğinde $\sigma_z = 0$ olarak elde edilir. Dış basınç durumunda (43) denkleminin yanısıra $\sigma_r(a) = 0$ ve $\sigma_r(b) = -P$ sınır koşulları geçerlidir. İç basınç durumunda olduğu gibi, bu üç denklemin birlikte çözümü

$$C_1 = -\frac{a^2 b^2 P(1+\nu)}{(b^2 - a^2)E} ; \quad C_2 = -\frac{b^2 P(1-\nu)}{(b^2 - a^2)E} ; \quad (45)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2b^2 P \nu}{(b^2 - a^2)E}$$

ifadelerini verir. Bulunan ifadeler (42) denkliğinde yerine yerleştirildiğinde iç basınç durumunda olduğu gibi $\sigma_z = 0$ bulunur.

SEMBOLLER LİSTESİ

a, b, c	kompozit tüpün iç, arayüz ve dış yarıçapı
C_i	integrasyon sabitleri
E	elastisite modülü
P	basınç (boyutsuz hali $\bar{P} = P / \sigma_{01}$)
r, θ, z	silindirik koordinatlar (boyutsuz radyal koordinat $\bar{r} = r / c$)
u	radyal yer değiştirme (boyutsuz hali $\bar{u} = u E_1 / c \sigma_{01}$)
ε_i	şekil değiştirme bileşenleri
ν	Poisson oranı
σ_i	gerilme bileşenleri (boyutsuz hali $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_{01}$)
σ_0, σ_Y	başlangıç ve daha sonraki akma gerilmesi

KAYNAKLAR

1. Timoshenko, S.P., **Strength of Materials: Part II Advanced Theory and Problems**, 3rd Edition, D. van Nostrand Company, New York, 1956.
2. Timoshenko, S.P. ve Goodier, J.N., **Theory of Elasticity**, 3rd Edition, McGraw Hill, New York, 1970.
3. Uğural, A.C. ve Fenster, S.K., **Advanced Strength and Applied Elasticity**, 3rd Edition, Prentice Hall International, London, 1995.
4. Boresi, A.P., Schmidt, R.J. ve Sidebottom, O.M., **Advanced Mechanics of Materials**, 5th Edition, Wiley, New York, 1993.
5. Nadai, A., **Plasticity**, Mc-Graw-Hill, New York, 1931.
6. Parker, A.P., "Autofrettage of open-end tubes - Pressures, stresses, strains, and code comparisons", **Journal of Pressure Vessel Technology - Transactions of the ASME**, 123, 271-281, 2001.
7. Perry, J. ve Aboudi, J., "Elasto-plastic stresses in thick walled cylinders", **Journal of Pressure Vessel Technology - Transactions of the ASME**, 125, 248-252, 2003.
8. Hill, R., **The Mathematical Theory of Plasticity**, Clarendon Press, Oxford, 1950.