

KEYFİ FİBER TAKVİYELİ VİSKOELASTİK PİEZOELEKTRİK BİR CİSMİN ELEKTRO-TERMOMEKANİK DAVRANIŞI İÇİN MATEMATİKSEL BİR MODEL

Ali Ünal ERDEM*, Mustafa Reşit USAL** ve Melek USAL**

*Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, 06570, Maltepe, Ankara
alierdem@gazi.edu.tr

**Makina Bölümü, Teknik Eğitim Fakültesi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 32160, Isparta
usalmr@tef.sdu.edu.tr ; esma@mmf.sdu.edu.tr

(Geliş/Received: 04.10.2004; Kabul/Accepted: 04.01.2005)

ÖZET

Bu çalışmada, keyfi fiber takviyeli viskoelastik ve piezoelektrik bir malzemenin dış çevreden maruz kaldığı elektromekanik yükler karşısındaki davranışı Sürekli Ortamlar Mekaniği kapsamında sistematik bir şekilde incelenmiştir. Cismin matris kısmı viskoelastik ve piezoelektrik anizotropiye sahip olup buna ilave olarak fiber takviyesi nedeniyle de cisim tüm ortam olarak anizotropik bir yapıya sahip olacaktır. Bu bağlamda cisim davranış olarak kendisini uyaran çevreye *elastik gerilme*, *dissipatif gerilme*, ve *elektriksel polarizasyon* alanları tarzında cevap verecektir. Buradaki büyüklükler bünye denklemleri olarak elde edilmiştir. Genel yaklaşım tarzı olarak elastik gerilme ve elektriksel polarizasyon alanları, işlemler içinde tanımlanan bir termodinamik potansiyelden (gerilme potansiyeli) türetilirken; dissipatif gerilme ise kendi argümanlarına bağlı tansörel bir fonksiyon olarak şekillendirilmiştir. Söz konusu argümanlar, Modern Sürekli Ortamlar Mekaniğinin genel aksiyomlarına göre tesbit edilmiş olup bunlar, deformasyon ölçüsü olarak *Green deformasyon tansörü*, *deformasyon hızları tansörü*, *elektrik alanı*, *fiber-dağılım tansörü*, ve *sıcaklık alanı*'ndan ibaret argümanlardır. Diğer taraftan herhangi bir teoriyle bünye fonksiyonlarının bizzat kendilerini elde etmek mümkün olamayacağından dolayı, bu fonksiyonlar hakkındaki tüm bilgiler oluşturulduktan sonra, bunların analitik oldukları varsayıp kuvvet serileriyle temsil edilmek suretiyle sıfır etkileşim civarındaki Taylor serisi açılımından ortaya çıkan terimler, ağırlıklarına göre sınıflandırılıp (örneğin lineer ve nonlinear davranışlar) göz önünde bulundurulmuş fiziksel durumlar referans alınarak kullanılmaktadır. Örneğin, mekanik etkileşimlerin lineer, elektromekanik etkileşimlerin ise nonlinear kabul edildiği uygulama durumları dikkate alındığında bünye denklemlerindeki fonksiyonları veren kuvvet serilerinin terimlerinin mertebeleri buna göre tesbit edilmektedir. Sonuç olarak elde edilen bünye denklemleri denge denklemlerinde yerlerine yazılarak alan denklemleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Viskoelastisite, fiber-dağılım tansörü, balans denklemleri, gerilme, polarizasyon, bünye aksiyomları, gerilme potansiyeli, alan denklemleri.

A MATHEMATICAL MODEL FOR THE ELECTROTHERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF AN ARBITRARILY FIBER-REINFORCED VISCOELASTIC PIEZOELECTRIC BODY

ABSTRACT

In this work behavior of an arbitrarily fiber-reinforced viscoelastic and piezoelectric material is investigated systematically in the context of modern continuum mechanics when they are subjected to external loadings. In addition to the strong anisotropy being caused by distribution of fibers in an otherwise isotropic material, we have assumed here that the matrix material is also by itself anisotropic with piezoelectric property. In this context the material will respond by means of *elastic stress*, *dissipative stress*, and *electric polarization* as relevant constitutive response functions. In this general approach elastic stress and polarisation is derived from a thermodynamic potential (elastic stress potential), while dissipative stress is expressed as a tensorial function in

terms of its relevant arguments. These arguments are the deformation measures which are fixed in conformity with the axioms of modern continuum mechanics. They are **Green deformation tensor**, **rate of deformation tensor**, **electric field**, **fiber-distribution vector**, and **absolute temperature**. On the other hand, because of evident impossibility of obtaining authentic identification of these response functions by any theory whatsoever, once general information has been established about their constitutive behavior, they are shaped by Taylor-series representations, about the zero-interaction, assuming that they are analytical functions of their relevant arguments. Depending on the physical context of the problem (such as linear or nonlinear in certain measures) a number of nonlinear terms appearing on the power series are considered appropriately. We are to choose proper degrees of the terms accordingly when for instance mechanical interactions are linear and electromechanical interactions are nonlinear. In the conclusion, field equations have been obtained by substituting relevant constitutive equations into the differential balance equations.

Keywords: Viscoelasticity, tensor of fiber distribution, balance equations, stress polarisation, constitutive axioms, stress potential, field equations.

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında (biyomekanikte ve tıp alanında doğal elemanlar olmak üzere) fiber takviyeli kompozit malzemelerin kullanımı gittikçe yaygınlaşmaktadır. Bir elastomer matrisi yüksek çekme mukavemetine sahip fiberlerle takviye ederek oluşturulan kompozit malzemeler otomobil lastiklerinde, taşıyıcı bantlarda ve şok sönmüleyicilerinde kullanılmaktadır. Burada bahsedilen endüstri ürünlerinin fiziksel davranışı genellikle anizotropik bir mikroyapı gösteren biyomalzemelerin davranışları ile ortak özellikler göstermekte ve bu yüzden de kemikler veya yumuşak biyolojik dokular için geliştirilen bünye modelleri aynı kategorilerde değerlendirilmektedir [1, 5].

Bu çalışmada geliştirilen matematiksel modelin üç temel özelliği; matris malzemesinin viskoelastik özellik taşıması, aynı ortamın fiber takviyesi ile kompozit hale getirilmiş olması, ve de piezoelektrik özellik taşımasıdır. Bu özelliklerin uygun tarzda bütünleştirilmesi sayesinde oluşturulan matematiksel modelimizin biyomalzemelerin ve yapay elastomerik kompozitlerin elektro-mekanik davranışını belirlemede pratik problemlerin formüle edilip çözülmesinde yarar sağlayacağı şüphesizdir.

Malzemelerin viskoelastik davranışı bir çok araştırmacı tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir [6-9]. Bu konudaki daha aksiyomatik çalışmalar, nonlinear termo-viskoelastisitenin temelleri üzerine Koh ve Eringen [10] tarafından yapılmıştır. Ancak bu makalelerdeki viskoelastik ortam fiber-takviyeli olarak incelenmemiştir. Biz bu çalışmamızda fiber dağılımını belli bir şekilde kısıtlamış olmayıp matematiksel olarak uzaysal ve keyfi bir sürekli vektör alanı ile temsil edilmesine fırsat tanınmak suretiyle doğal kompozit malzemelerin temsiline de imkan vermektediriz.

Diğer taraftan, fiber takviyeli malzemelerin mekanik davranışı Mülhern, Rogers ve Spencer tarafından incelenmiştir [11,12]. Fiber takviyeli kompozitler konusunda Spencer'ın çalışmaları [12,13] yol gösterici ve belirleyici olmuştur. Piezoelektrik malzemeler ve davranışları konusunda çok geniş bir literatür

mevcuttur ve bu konuda yapılan çalışmaların önemli bir kısmı Mindlin, Parkus, Kamlah, Tiersten tarafından yapılan yayınlarda ortaya dökülmekte [14-17] ancak bu çalışmaların hiç birinde fiber takviyesi dikkate alınmamaktadır. Sürekli ortamların elektro-dinamiği konusunda yakın zamanda hazırlanan önemli iki yayın Eringen ve Maugin tarafından gerçekleştirilmiştir [18-19]. Yukarıda adıgeçen literatüre ilave olarak yakın zamanda yapılmış olan diğer bazı yayınlar da şimdiki çalışmamızın temellerini oluşturmaktadır [20-23, 4].

2. HAREKET VE DEFORMASYON

Araştırmak istediğimiz sözkonusu ortama ait bir serbest cisim göz önüne alalım. Bu ortamın etkileşimlerine geçmeden önce uzaydaki konumunu geometrik olarak belirlemek için bir dikgen eksen takımı seçelim (Şekil 1). Maddesel noktaların referans konumları $\mathbf{X}$ yer-vektörü, herhangi bir t anındaki uzaysal konumları da $\mathbf{x}$ yer vektörü ile temsil edilmiş olsun. Ortama ait herhangi bir $\mathbf{X}$ maddesel noktasının herhangi bir t anındaki konumu, yani ortamın hareketi $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$, fonksiyonu ile belirlidir. Ortamın deformasyonu, $\mathbf{X}$ in bir $d\mathbf{X}$ civarının $\mathbf{x}$ in bir $d\mathbf{x}$ civarına gitmesi ve iki civar arasındaki bağıntının belirlenmesi ile kesinlik kazanır. Bu da, $d\mathbf{x}=\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$, $x_l = x_l(\mathbf{X}_L, t)$, ($l=1,2,3$) şeklinde bir transformasyondur. Burada $\mathbf{F}=F_{kK} \mathbf{i}_k \mathbf{I}_K$ büyüklüğü hareket verildiği müddetçe belli olup deformasyon gradyanı ismiyle anılmaktadır. Bu ifadenin aynı eksen takımına göre matris temsili,

$$\underline{\underline{F}} \equiv [F_{ll}] = [x_{l,L}] = \left[\frac{\partial x_l}{\partial X_L} \right], \quad (l, L=1,2,3),$$

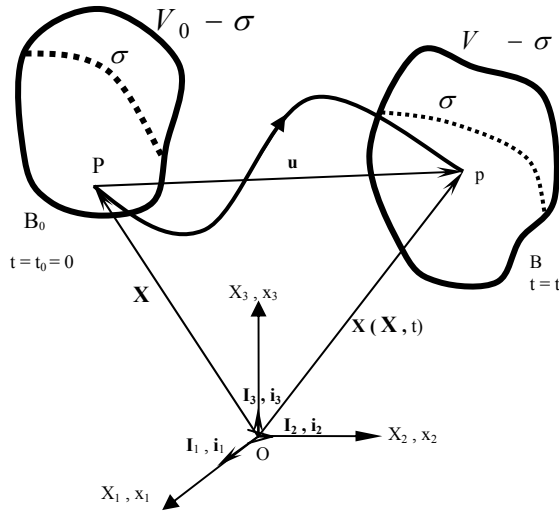
$$J = \det(x_{l,L}) \quad , \quad 0 < J < \infty \quad , \quad (1)$$

şeklinde olup bundan böyle koyu harfler vektörleri ve tansörleri; altı çift-çizgili harfler matrisleri temsil edecek, ayrıca bileşenlerle ifade edilen denklemlerde iki-kerre tekrarlanan indeksler üzerinde toplama işlemi anlaşılabacaktır. Altı tek-çizgili harfler de ilgili vektörün verilen eksen takımına göre sütun matrisini gösterecektir.

$d\mathbf{X}$ vektörünün uzunluğu dS , $d\mathbf{x}$ vektörünün uzunluğu ise ds ile gösterildiği takdirde, deformasyondan önce iki maddesel nokta arasındaki mesafe ile deformasyondan sonraki iki nokta arasındaki mesafe için, maddesel ve uzaysal koordinatlarda,

$$\begin{aligned} dS^2 &= d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_K dX_L \delta_{KL} = dX_K dX_K \\ &= X_{K,k} X_{K,l} dx_k dx_l = c_{kl} dx_k dx_l \\ ds^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_k dx_k \\ &= x_{k,K} x_{k,M} dX_K dX_M = C_{KM} dX_K dX_M \end{aligned} \quad (2)$$

yazılabilir. Burada, $\delta_{KL} = \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L$ ve $\delta_{kl} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l$ olup sırasıyla maddesel ve uzaysal koordinatlarda Kronecker-delta sembollerini göstermektedir.



Şekil 1. Hareket ve deformasyon

Sürekli ortamlar mekaniğinde çok yaygın olarak kullanılan ve (2) deki son ifadelerde sembolize edilen deformasyon ve genleme tansörlerine ait tanımlar aşağıdaki gibidir.

Green deformasyon tansörü;

$$C_{KL}(X,t) \equiv x_{l,K} x_{l,L}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3)$$

Cauchy deformasyon tansörü;

$$c_{kl}(x,t) \equiv X_{L,k} X_{L,l}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (4)$$

Piola deformasyon tansörü;

$$C_{KL}^{-1} \equiv X_{K,l} X_{L,l}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (5)$$

Finger deformasyon tansörü;

$$c_{kl}^{-1} \equiv x_{k,L} x_{l,L}, \quad \mathbf{c}^{-1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (6)$$

Ayrıca boy değişiminin bir ölçüsü olarak

$$ds^2 - dS^2 = 2e_{KL} dX_K dX_L = 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (7)$$

şeklinde beliren deformasyon ölçüleri de yeri geldiğinde aşağıdaki isim ve tanımlarla anılacaktır:

Lagrange genleme tansörü:

$$E_{KL}(X,t) \equiv \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (8)$$

Euler genleme tansörü:

$$e_{kl}(x,t) \equiv \frac{1}{2}(\delta_{kl} - c_{kl}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}). \quad (9)$$

İleride kullanacağımız birkaç önemli bağıntıdan birisi

$$\dot{C}_{KL} = 2d_{kl} x_{k,K} x_{l,L} = 2\dot{E}_{KL}, \quad (10)$$

olup buradaki d_{kl} ,

$$d_{kl} \equiv v_{(k,l)} \equiv \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) = d_{lk} \quad (11)$$

şeklinde tanımlanan *deformasyon hızları tansörünü* göstermekte ve $v_{(k,l)}$ hız gradyanı tansörünün simetrik kısmı olarak tanımlanmakta; bu tansörün anti-simetrik kısmı da spin tansörü olarak

$$w_{kl} \equiv v_{[k,l]} \equiv \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) = -w_{lk} \quad (12)$$

şeklinde verilmektedir. Bu ayrışım

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad \text{veya} \quad v_{l,k} = d_{lk} + w_{lk} \quad (13)$$

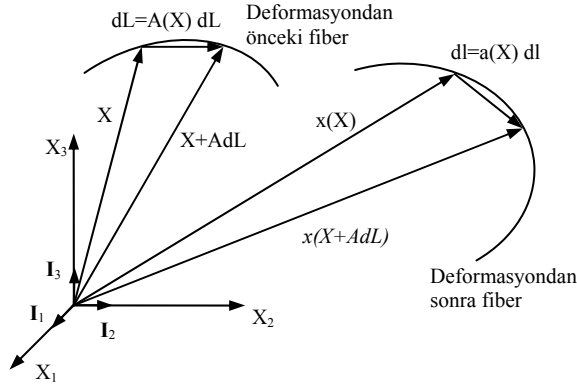
şeklinde de gösterilmekte olup kinematik olarak birinci terim bir maddesel noktanın maruz kaldığı deformasyon hızlarını, ikincisi de rijid dönme hızlarını temsil etmektedir.

3. FİBER DEFORMASYON GEOMETRİSİ VE KİNEMATİĞİ

Gerek doğal gerekse yapay kompozit malzemelerin önemli bir alt sınıfını fiber takviyeli kompozitler oluşturmaktadır [1,3,4,5,12,13]. Bu çalışmada ele aldığımız kompozit malzemenin her noktasından fiber ailesini temsil eden bir maddesel eğri geçmektedir. Bu fiber ailesi deformasyondan önce sürekli bir $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ vektör alanı ile deformasyondan sonra ise yine sürekli bir $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektör alanı ile temsil edilmektedir. Bu vektörler Şekil 2'de gösterilmiştir. Deformasyondan önceki fiber alanının deformasyondan sonraki konumlarına geçişleri ortamla birlikte sürüklenme şeklinde gerçekleşmektedir.

Deformasyondan sonraki diferansiyel fiber uzunluğu $d\mathbf{l}$ için, deformasyondan önceki $d\mathbf{L}$ cinsinden aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\mathbf{a} d\mathbf{l} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + \mathbf{A}d\mathbf{L}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (14)$$



Şekil 2. Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi [22].

Bu bağıntının sağ tarafı $\mathbf{X}$ noktası civarında Taylor serisine açılıp yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse, deformasyondan önceki ve sonraki fiber uzunlukları arasındaki ilişki elde edilir:

$$a_k dl = x_{k,K} A_K dL \quad \text{veya} \quad a_k \frac{dl}{dL} = x_{k,K} A_K \quad (15)$$

Fiber ailesine ait uzama oranını veren

$$\lambda_a \equiv \left(\frac{dl}{dL} \right)_a \quad (16)$$

(16) ifadesi, (15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$a_k = \lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K, \quad \underline{a} = \lambda_a^{-1} \underline{F} \underline{A} \quad (17)$$

ifadeleri elde edilmiş olur.

Fiber ailesine ait deformasyon geometrisi (17) bağıntısıyla ifade edilmektedir. Burada $\underline{A}$ ve $\underline{a}$ vektörleri deformasyondan önceki ve sonraki birimlere edilmiş fiber vektörlerini göstermekte olduğundan,

$$|\underline{A}| = |\underline{a}| = 1 \quad \text{ve} \quad \underline{A} \cdot \underline{A} = \underline{a} \cdot \underline{a} = 1 \quad (18)$$

$$a_k a_k = 1 = \lambda_a^{-2} x_{k,K} x_{k,L} A_K A_L = \lambda_a^{-2} C_{KL} A_K A_L \quad (19)$$

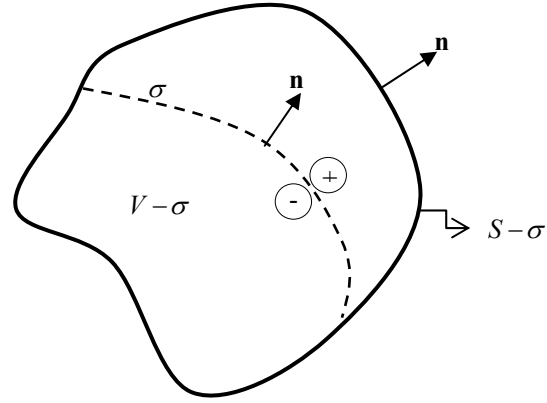
işlemleri geçerlidir. (Burada (17) ifadeleri dikkate alınmıştır). Buna göre

$$\lambda_a^2 = C_{KL} A_K A_L, \quad \lambda_a^2 = \underline{A}^T \underline{C} \underline{A} \quad (20)$$

ifadesi yazılır. Bu son eşitlik, deformasyon ve fiber dağılımı verildiği zaman uzayabilen fiberler söz konusu olduğunda fiber-uzama oranını bulmak için kullanılır.

4. BALANS DENKLEMLERİ

Çalışmada bütünlüğü sağlamak için yerel balans denklemleri özet olarak verilecektir. $S(t)$ yüzeyi ile



Şekil 3. σ Süreksizlik yüzeyi

sınırlandırılmış, $V(t)$ hacmine sahip bir sürekli ortamda $\mathbf{u}$ hızı ile hareket eden bir $\sigma(t)$ süreksizlik yüzeyinin bulunduğu düşünülmektedir (Şekil 3).

4.1. Elektrostatik Balans Denklemleri

Göz önüne aldığımız ve t anında $V(t)$ hacmini kaplayan ortamın çevresi ile olan etkileşiminde mekanik olmayan kuvvetlerin tabi olduğu quazi-statik elektriksel alanı yöneten integral denklemler "Genelleştirilmiş" Gauss ve Stokes teoremleri kullanılarak yerelleştirildiğinde aşağıdaki diferansiyel ifadeler elde edilmiş olur.

Gauss Yasası:

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0 \quad V(t) \text{ içinde} \quad (21)$$

$$[[\underline{D}]] \cdot \underline{n} = 0 \quad \sigma(t) \text{ üzerinde} \quad (22)$$

Faraday yasası:

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} = -\nabla \phi(t) \text{ içinde} \quad (23)$$

$$\underline{n} \times [[\underline{E}]] = 0 \quad \sigma(t) \text{ üzerinde} \quad (24)$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \quad \text{veya} \quad D_r = \epsilon_0 E_r + P_r \quad (25)$$

Burada, $\underline{D}$ elektrik yer-değiştirme vektörü, $\underline{n}$ süreksizlik yüzeyinin dış birim normali, $\underline{E}$ elektrik alan vektörü, ϕ elektrostatik potansiyel, ϵ_0 boşluğun elektriksel permitivitesi, $\underline{P}$ polarizasyon alan vektörü, $[[\underline{D}]] \equiv \underline{D}^+ - \underline{D}^-$ süreksizlik yüzeyi üzerinde $\underline{D}$ nin sıçrama değerini göstermektedir [17]. (21) ve (22) denklemlerinden gözüktüğü gibi, göz önünde bulundurduğumuz ortam, serbest elektrik yük dağılımı içermemektedir.

4.2. Termomekanik Denge Denklemleri

Benzer şekilde global balans denklemleri (kütle, lineer momentum, açısal momentum, enerji ve entropi üretimi) yerelleştirildiği takdirde elde edilen diferansiyel ifadeler şu şekilleri alır:

Kütlenin Korunumu

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0 \quad V(t) \text{ içinde} \quad (26)$$

$$[[U\rho]] = 0 \quad \sigma(t) \text{ üzerinde} \quad (27)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{Maddesel gösterimde}) \quad (28)$$

Lineer Momentumun Dengesi

$$\rho \dot{v}_k = t_{lk,l} + \rho f_k + F_k^E \quad V(t) \text{ içinde} \quad (29)$$

$$[[n_l t_{lk} + \rho v_k U]] = 0 \quad \sigma(t) \text{ üzerinde} \quad (30)$$

Açısal Momentumun Dengesi

$$\varepsilon_{krp} t_{rp} + C_k^E = 0 \quad V(t) \text{ içinde} \quad (31)$$

$$\varepsilon_{klp} x_l [[n_r t_{rp} + \rho U v_p]] = 0 \quad \sigma(t) \text{ üzerinde} \quad (32)$$

Enerji Denkliği

$V(t)$ içinde

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h + \rho h^E + C_k^E w_k \quad (33)$$

$\sigma(t)$ üzerinde

$$\rho U [[\varepsilon + (1/2) | \mathbf{v} |^2]] + n_k [[t_{kl} v_l - q_k]] = 0 \quad (34)$$

Termodinamiğin İkinci Kanunu (Clausius-Duhem Eşitsizliği)

$V(t)$ içinde

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (35)$$

$$\rho U [[\eta]] - [[\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} / \theta]] \leq 0 \quad \sigma(t) \text{ üzerinde} \quad (36)$$

Burada U , süreksizlik yüzeyinin sürekli ortama göre bağıl yer değiştirme hızı olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$U \equiv u_n - v_n = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \quad (37)$$

Ayrıca $\mathbf{v}$ sürekli ortamdaki hız alanı, $\mathbf{u}$ süreksizlik yüzeyinin hızı, $\dot{\mathbf{v}}$ ivme, t_{lk} gerilme tansörü, f_k birim kütle başına mekanik hacımsal kuvvet, F_k^E birim hacim başına elektrostatik gövde kuvveti, C_k^E birim hacim başına elektrostatik kuvvet çifti, ε birim kütle başına iç-enerji yoğunluğu, q_k ısı akısı vektörü (birim zamanda ve birim yüzey alanından sisteme giren ısı miktarı olup bu vektör daima yüzey dışına doğru yönelmiş olarak seçilmektedir. Bu durum, enerji denklemi yazılırken dikkate alınmıştır), h birim kütle başına ısı kaynağı, h^E elektrostatik enerji kaynağı, w_k açısal hız, η birim kütle başına entropi yoğunluğu, $\theta(\mathbf{X}, t)$ bir t anında $\mathbf{X}$ maddesel noktasının mutlak

sıcaklık dağılımı, $\rho \gamma$ birim kütle başına entropi üretimi olup ε_{ijk} permütasyon tansörünü göstermektedir.

Denge denklemlerinde geçen elektrostatik kaynaklı kuvvet ve kuvvet-çifti ve enerji kaynak ifadeleri de

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} \Rightarrow F_i^E = P_j E_{i,j} \quad (38)$$

$$\mathbf{C}^E \equiv \mathbf{P} \times \mathbf{E} \Rightarrow C_i^E = \varepsilon_{ijk} P_j E_k \quad (39)$$

$$\rho h^E \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{t}^E : \mathbf{d} \Rightarrow \rho h^E = E_k P_k + t_{kl}^E d_{kl} \quad (40)$$

şeklinde olup, burada (40) ifadesindeki (*) işareti aşağıdaki anlamda kullanılmıştır.

$$\mathbf{P} \equiv \dot{\mathbf{P}} - P_k \mathbf{v}_{,k} + \mathbf{P} v_{k,k} \quad (41)$$

Burada sembol üzerindeki nokta da maddesel türevi göstermektedir [17].

Asimetrik bir tansör olan $\mathbf{t}^E$ polarizasyon gerilme tansörü olarak bilinir ve

$$\mathbf{t}^E = \mathbf{P} \otimes \mathbf{E} \Rightarrow t_{ij}^E = P_i E_j \quad (42)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [15, 17]. Burada $\otimes$ tansörel çarpımı göstermektedir. $\mathbf{C}^E$ nin tanımı (31) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon_{krp} (t_{rp} + P_r E_p) &= 0 \Rightarrow \\ \varepsilon_{krp} (t_{rp} + t_{rp}^E) &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

olur. Burada ε_{krp} antisimetrik bir tansör olduğundan parantez içindeki ifadenin simetrik olması gerekir. buna yeni bir isim vererek

$$\bar{t}_{rp} \equiv t_{rp} + P_r E_p = \bar{t}_{pr} \quad (44)$$

şeklinde simetrik bir tansör oluşturmuş oluruz. Eski tansörümüz yenisi cinsinden

$$t_{rp} = \bar{t}_{rp} - P_r E_p \quad (45)$$

şeklinde yazılıp diverjansı alınırsa,

$$t_{rp,r} \equiv \bar{t}_{rp,r} - (P_{r,r} E_p + P_r E_{p,r}) \quad (46)$$

ifadesi elde edilir. Lineer momentumun yerel korunumu (29) denkleminde (38) ve (46) eşitlikleri yerine konulduğunda da

$$\rho \dot{v}_p = \rho f_p + \bar{t}_{rp,r} - P_{r,r} E_p \quad (47)$$

şeklinde lineer momentum denklemimiz simetrik bir gerilme tansörü cinsinden yazılmış olur. Diğer taraftan (11), (41) ve (42) ifadeleri (40) da yerine yazılırsa enerji kaynak terimi de

$$\rho h^E = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} v_{k,k} - E_l P_k v_{l,k} + \frac{1}{2} P_k E_l (v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (48)$$

şeklini alır. Birim kütle başına polarizasyon vektörünü $\Pi \equiv \frac{\mathbf{P}}{\rho}$ şeklinde tanımlarsak ($\mathbf{P} = \rho \Pi$) maddesel

türevi $\frac{\dot{\mathbf{P}}}{\rho} = \dot{\rho} \Pi + \rho \dot{\Pi}$ şeklinde alınıp (48) de yerine yazılır ve kütle-korunum yasası dikkate alınarak uygun indis değişimi ve sadeleştirmeler yapılsa enerji kaynak yoğunluğu için

$$\rho h^E = \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\Pi} - P_k E_l v_{l,k} + \frac{1}{2} P_k E_l v_{k,l} + \frac{1}{2} P_k E_l v_{l,k} \quad (49)$$

elde etmiş oluruz. Açısız hızı spin tansörünün düalin-den $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ şeklinde çekersek ve (39) da verilen

$\mathbf{C}^E$ nin tanımını göz önüne alırsak yerel enerji denklemi (33) ün son terimi,

$$C_m^E w_m = \frac{1}{2} P_k E_l v_{l,k} - \frac{1}{2} P_k E_l v_{k,l} \quad (50)$$

şekline girer. Yukarıda verilen (49) ve (50) ifadeleri toplanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılsa

$$\rho h^E + \mathbf{C}^E \cdot \mathbf{w} = \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\Pi} \quad (51)$$

şeklinde elde edilmiş olur. (51) ifadesi (33) de yerine yazıldığında enerji korunumu için

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h + \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\Pi} \quad (52)$$

şeklinde yerel denklem ortaya çıkmış olur.

Bu düzenlemelerden sonra denge denklemlerinde elektrik alan ve polarizasyon vektörüne ait bileşenler açıkça görülmektedir. Yerel elektro-termomekanik denge denklemlerini son haliyle aşağıda özetliyoruz.

Kütlenin korunumu;

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0 \quad (53)$$

Lineer momentumun dengesi;

$$\rho \dot{\mathbf{v}}_p = \rho \mathbf{f}_p + \bar{t}_{r,p,r} - P_{r,r} E_p \quad (54)$$

Açısız momentumun dengesi;

$$\varepsilon_{krp} \bar{t}_{rp} = 0 \quad (55)$$

Enerji dengesi;

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h + \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\Pi} \quad (56)$$

Clausius-Duhem eşitsizliği;

$$\rho \eta - \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (57)$$

5. TERMODİNAMİK KISITLAR VE BÜNYE DENKLEMLERİNİN MODELLENMESİ

Yerel enerji denklemi (56) dan (ρh) çekilir, entropi eşitsizliği (57) de yerine yazılırsa,

$$\rho \gamma \equiv \frac{\rho}{\theta} (\dot{\varepsilon} - \theta \dot{\eta} - \mathbf{E} \cdot \dot{\Pi}) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} - \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (58)$$

şeklindeki eşitsizlik elde edilir. Bu ifadedeki entropi yoğunluğunun ve polarizasyonun maddesel türevi termodinamik bir proses içinde kontrol edilemeyeceğinden dolayı bu büyüklüklerin türevini, kontrol edilebilen θ ve $\mathbf{E}$ büyüklüklerine intikal ettirmek için, bir Legendre transformasyonu kullanılabilir:

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta - \mathbf{E} \cdot \Pi = \varepsilon - \theta \eta - \rho^{-1} E_k P_k \quad (59)$$

Sonuç olarak yeni terimler cinsinden entropi eşitsizliği,

$$-\rho (\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \bar{t}_{kl} d_{lk} - P_k E_l v_{l,k} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} - P_k \dot{E}_k \geq 0 \quad (60)$$

şekline dönüşmüş olur. Bu eşitsizlik bilinen yöntemle [15, 17] maddesel forma sokulduğunda

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{2} \bar{T}_{KL} \dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta} \theta_{,K} Q_K - \Pi_K \dot{E}_K \geq 0 \quad (61)$$

elde edilmiş olur. Burada geçen yeni büyüklüklerle ilgili terimler aşağıda verilmektedir:

$$\Sigma \equiv \rho_0 \psi \quad (62)$$

$$\dot{C}_{KL} = 2 d_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \Rightarrow d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad (63)$$

$$\bar{T}_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} \bar{t}_{kl} \Rightarrow \bar{t}_{kl} = J^{-1} x_{k,K} x_{l,L} \bar{T}_{KL} \quad (64)$$

$$Q_K \equiv J X_{K,k} q_k \Rightarrow q_k = J^{-1} x_{k,K} Q_K \quad (65)$$

$$\Pi_K \equiv \rho_0 X_{K,k} \Pi_k = \frac{\rho_0}{\rho} X_{K,k} P_k \Rightarrow P_k = J^{-1} x_{k,K} \Pi_K \quad (66)$$

$$E_K \equiv x_{k,K} E_k \Rightarrow E_k = X_{K,k} E_K \quad (67)$$

$$\theta_{,K} = x_{k,K} \theta_{,k} \Rightarrow \theta_{,k} = X_{K,k} \theta_{,K} \quad (68)$$

(61) eşitsizliği, quazi-elektrostatik bir alanın etkisinde bulunan ve viskoelastik özellik taşıyan termomekanik ortamlar için entropi üretiminin genel bir ifadesidir. Bu eşitsizliğin kullanılabilmesi için Σ termodinamik potansiyelinin hangi bağımsız değişkenlere ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Buna göre Σ 'nın argümanlarını seçmek formal olarak belli bir malzeme seçmek demektir. Seçilen malzemeye göre Σ 'nın argümanları ve bağlı olduğu değişkenler, bünye aksiyomlarını kullanarak bulunmuştur. Ele alınan malzemede $\mathbf{X}$ maddesel noktasının t anındaki Σ gerilme potansiyeli, cismi meydana getiren tüm maddesel noktaların hareket ve sıcaklık tarihi ile elektrostatik alanına bağlı olduğundan,

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'), \mathbf{E}(\mathbf{X}', t'), \mathbf{X}], \quad \mathbf{X}' \in B, \quad -\infty < t' \leq t \quad (69)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada t' ; şu an ve geçmiş arasında herhangi bir zamandır. $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}$ den başka diğer bütün maddesel noktaları göstermektedir. (69) ifadesinden görüldüğü gibi t anında $\mathbf{X}$ maddesel noktasındaki gerilme potansiyeli (sol taraf), cismin tüm $\mathbf{X}'$ noktalarının geçmişteki tüm t' zamanlarındaki hareket, sıcaklık, ve elektrik alanlarına bağlı bir fonksiyoneldir (**kozalite** aksiyomuna göre). Bilinen yöntemlerle bu argüman fonksiyonların şimdiki zaman t ve ölçüm noktası $\mathbf{X}$ noktası civarında Taylor serisi temsillerinde uygun sayıda terim muhafaza ederek ve de **objektivite**, **yakın civarsallık**, **hafıza ve tutarlılık** aksiyomlarının sonuçlarını kullanırsak [24, 25], ısı iletiminin olmadığı, elektro-mekanik yüklemeye maruz tek fiber aileli piezoelektrik ve viskoelastik bir yapıya imkan veren Σ nın bağlı olduğu argümanlar aşağıdaki gibi ortaya dökülebilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), \dot{C}_{KL}(\mathbf{X}, t), E_K(\mathbf{X}, t), A_K(\mathbf{X}), \theta(\mathbf{X}, t)] \quad (70)$$

Malzemenin homojen olduğunu kabul ederek, (70) ifadesi ile verilen Σ nın bağlı olduğu argümanlardan $\mathbf{X}$ kaldırılmıştır. $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ nın maddesel türevinin sıfır olduğunu düşünerek (70) ifadesinin maddesel türevi alındığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{C}_{KL}} \ddot{C}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_K} \dot{E}_K + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (71)$$

(71) ifadesi (61) eşitsizliğinde yerine yazılır, ortak terimlerin parantezleri alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\bar{T}_{KL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}}) \dot{C}_{KL} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{C}_{KL}} \ddot{C}_{KL} - \\ & (\Pi_K + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_K}) \dot{E}_K - \rho_0 (\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \\ & - \frac{1}{\theta} Q_K \theta_{,K} \geq 0 \end{aligned} \quad (72)$$

eşitsizliğine ulaşırız. (72) eşitsizliğinin keyfi her bağımsız termodinamik proseste sağlanabilmesi için gerilme potansiyelinin argümanları içinde bulunmayan $\ddot{C}_{KL}$, $\dot{E}_K$, $\dot{\theta}$, ve $\theta_{,K}$ nın katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir [25]. ($\dot{C}_{KL}$, Σ nın argümanları içerisinde yer aldığından bu eşitsizlikteki $\dot{C}_{KL}$ nin katsayısı sıfıra eşitlenemez). $\dot{C}_{KL}$ nin katsayısına

$$\begin{aligned} {}_D \bar{T}_{KL} & \equiv \bar{T}_{KL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \Rightarrow \\ \bar{T}_{KL} & = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} + {}_D \bar{T}_{KL} \end{aligned} \quad (73)$$

şeklinde bir isimlendirme yaparsak, (dissipative gerilme), bu durumda

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{C}_{KL}} = 0 \Rightarrow \Sigma = \Sigma(C_{KL}, A_K, E_K, \theta) \quad (74)$$

$$\Pi_K = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_K} \quad (75)$$

$$\eta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \quad (76)$$

$$Q_K = 0 \quad (77)$$

elde edilir. (77) ifadesi baştan tasarladığımız gibi ortamda ısı iletiminin olmadığını ifade etmektedir. (73)-(77) ifadeleri kullanılarak (72) eşitsizliği de aşağıdaki hale indirgenmiş olur.

$$\frac{1}{2} {}_D \bar{T}_{KL} \dot{C}_{KL} \geq 0 \quad (78)$$

Bu eşitsizlik, dissipatif gerilme için bir kısıt getirmektedir. $\dot{C}_{KL}$ simetrik bir tansör olduğundan ${}_D \bar{T}_{KL}$ nin antisimetrik kısmının dissipasyon eşitsizliğine bir katkısı olmaz. Antisimetrik kısım için ayrı bir bünye denkleminin yazılması mümkün olmakla birlikte, fiziksel mülahaza olarak dissipasyona katkısızlığı nedeniyle bu kısmın sıfır olduğunu farzediyoruz. Buna göre,

$${}_D \bar{T}_{KL} = {}_D \bar{T}_{KL} (C_{KL}, \dot{C}_{KL}, A_K, E_K, \theta) \quad (79)$$

şeklinde olur. (78) eşitsizliğindeki ${}_D \bar{T}_{KL}$ tansörünün, $\dot{C}_{KL}$ cinsinden sürekli bir fonksiyon olduğu düşünülür.

lürse, $\dot{C}_{KL} = 0$ olduğu zaman ${}_D\bar{T}_{KL}$ nin de sıfır olması gerekir. Buna göre (79) ifadesinde bağımsız bünye değişkenlerinin sırası muhafaza edilerek,

$${}_D\bar{T}_{KL}(C_{KL}, 0, A_K, E_K, \theta) = 0 \quad (80)$$

ifadesi yazılmalıdır. Bu da dissipatif gerilme için ikinci bir kısıt oluşturmaktadır.

Bu çalışmada viskoelastik bir malzeme ele alındığından, malzeme içinde oluşan $\bar{T}_{KL}$ simetrik gerilme tansörü, iki gerilme tansöründen meydana gelmektedir. Her biri simetrik olan bu gerilme tansörleri elastik gerilme ve dissipatif gerilme olarak adlandırılır. Buna göre $\bar{T}_{KL}$ gerilme tansörü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\bar{T}_{KL} \equiv {}_E\bar{T}_{KL} + {}_D\bar{T}_{KL} \quad (81)$$

(81) ifadesindeki ${}_D\bar{T}_{KL}$ dissipatif gerilme tansörü (79) ifadesiyle tanımlanmıştı. ${}_E\bar{T}_{KL}$ elastik gerilme tansörü ise (73) ve (81) e göre aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$${}_E\bar{T}_{KL} \equiv 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (82)$$

Bu ifade elastik gerilme için bünye denklemdir ve elastik gerilmedeki Σ 'nın bağlı olduğu argümanlar daha önce (74) denkleminde belirlenmiştir. (81) ifadesiyle verilen ve bünye denklemlerinden olan simetrik gerilme tansörü uzaysal koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{t}_{kl} = {}_E\bar{t}_{kl} + {}_D\bar{t}_{kl} \quad \text{veya} \quad \bar{t} = {}_E\bar{t} + {}_D\bar{t} \quad (83)$$

Açısal momentum balansının ve elektrostatik kaynaklı kuvvet-çiftinin bir neticesi olarak gerilme tansörümüz asimetrik bir karakterle ortaya çıkmıştı (45). Asimetrik gerilmenin maddesel koordinatlardaki ifadesinin

$$\begin{aligned} T_{KL} &= \bar{T}_{KL} - \Pi_K X_{M,l} X_{L,l} E_M \\ &= \bar{T}_{KL} - \Pi_K E_M C_{ML}^{-1} \end{aligned} \quad (84)$$

şeklinde olduğu rutin işlemlerle gösterilebilir.

Diğer taraftan iç enerji yoğunluğu, ε , (59) ve (62) ifadelerinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\rho_0} \Sigma + \theta \eta + \rho^{-1} P_k E_k \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left(\Sigma - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \theta - \frac{\partial \Sigma}{\partial E_K} E_K \right) \end{aligned} \quad (85)$$

Asimetrik gerilmenin hesaplanması için elastik gerilmenin, dissipatif gerilmenin ve polarizasyon alanının bilinmesi gerekir. (82) ve (75) ifadeleriyle verilen bünye denklemlerinden elastik gerilmenin ve polarizasyon alanının serbest enerji fonksiyonu Σ dan türetildiği, dissipatif gerilmenin gerilme potansiyelinden bağımsız olarak argümanları belli olan bir form şeklinde ortaya çıktığını önceden görmüştük, (79). Bu durumda bünye fonksiyonları olarak ortaya çıkan ve argümanları belli olan Σ ve ${}_D\bar{T}_{KL}$ nin açık formlarının ortaya konulması gerekir. Ancak öncelikle maddesel simetri aksiyomunun, ele alınan malzemenin bünye fonksiyonları üzerine getirdiği kısıtlar gözden geçirilmelidir.

Malzemenin simetri grubu ful ortogonal grub (izotropik malzeme) veya onun herhangi bir alt grubu olsun (anizotropik malzeme). $\underline{\underline{S}} = [S_{KL}]$, maddesel koordinatların ortogonal dönüşümünü (veya maddesel ortamın referans eksen takımına göre rijid konfigürasyonlarını) temsil eden ve ortamın simetri grubuna ait keyfi herhangi bir simetri operasyonu (matris) olsun. Maddesel simetri aksiyomuna göre her $\underline{\underline{S}}$ ortogonal matrisi ile oluşturulan

$$\begin{aligned} X'_K &= S_{KL} X_L, \quad X_L = S_{LK}^T X'_K, \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T \quad (86) \\ (\text{Her } \underline{\underline{S}} \text{ için, yani her simetri operasyonu için}) \end{aligned}$$

şeklindeki dönüşüm altında bünye fonksiyonları form-invariant kalmalıdır. Bu, matematiksel olarak

$$\Sigma(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}}, \theta) = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{E}}, \theta) \quad (87)$$

$$\begin{aligned} {}_D\bar{T}(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\dot{C}}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}}, \theta) = \\ \underline{\underline{S}} {}_D\bar{T}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{E}}, \theta) \underline{\underline{S}}^T \end{aligned} \quad (88)$$

dönüşümlerinin geçerli olması demektir.

Diğer taraftan gerek fiberlerin uzamazlığı ve gerekse de ortamın sıkışmazlığı, formülasyon açısından pratikte yaygın bir kabul görmektedir. Ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edildiğinde (20) denklemi gereğince

$$J^2 = \det \mathbf{C} = III = 1 \quad (\text{sıkışmazlık}) \quad (89)$$

$$\lambda_a^2 = C_{KL} A_K A_L = 1 \quad (\text{uzamazlık}) \quad (90)$$

şeklinde. Bu durumda elastik gerilme için bünye denklemi maddesel ve uzaysal koordinatlarda aşağıdaki gibi elde edilir.

$${}_E\bar{T}_{KL} = -p C_{KL}^{-1} + T_a A_K A_L + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (91)$$

$${}_E \bar{t}_{kl} = -p \delta_{kl} + T_a a_k a_l + 2x_{k,K} x_{l,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (92)$$

Bu ifadelerdeki p ve T_a , Lagrange çarpanları olup alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenir.

O halde (66) ve (64) ifadelerine göre, $J=1$ alınmak suretiyle, polarizasyon alanı, elastik ve dissipatif gerilme tansörleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P_k = x_{k,K} \Pi_K \quad (93)$$

$${}_E \bar{t}_{kl} = x_{k,K} x_{l,L} \bar{T}_{KL} \quad (94)$$

$$D \bar{t}_{kl} = x_{k,K} x_{l,L} \bar{T}_{KL} \quad (95)$$

Bu çalışmada matris malzemesi genel anizotrop bir ortam olarak düşünülmüştür. Bu yaklaşım çerçevesinde, Σ gerilme potansiyeli ve dissipatif gerilme fonksiyonu bağlı oldukları argümanların bileşenleri cinsinden kuvvet serisine açılarak kompozit ortamın viskoelastik davranışı ve polarizasyon tepkisi elde edilecektir. Seri açılımında dikkate alınan terimlerin türü ve sayısı ortamın nonlineerlik mertebelerini belirlemiştir. Bu çalışmada mekanik etkileşimlerin lineer, elektriksel etkileşimlerin ise nonlineer olduğu varsayılmıştır. Diğer taraftan matris malzemesinin fiber boyunca yön değişimine duyarlı kalması gerektiğinden, fiber dağılımını temsil eden vektör alanının argüman olarak çift sayıdaki dış çarpımlarla ifadeleri dikkate alınması gerekmektedir. Bu durum, aşağıdaki bölümlere ait işlemlerde dikkate alınacaktır.

6. ELASTİK GERİLME VE POLARİZASYON ALANININ TAYİNİ

Green deformasyon tansörü ile genleme tansörü arasında $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$ bağıntısı olduğundan, (74) denklemleri verilen gerilme potansiyelinin argümanları

$$\Sigma = \Sigma(E_{KL}, A_K, E_K, \theta) \quad (96)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu fonksiyonun E_{KL}, A_K, E_K büyüklükleri cinsinden analitik olduğu varsayılarak $E_{KL} = 0, E_K = 0$, ve $A_K = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa gerilme potansiyeli için,

$$\begin{aligned} \Sigma(E_{KL}, A_S, E_Q, \theta) = & \Sigma_0 + \Sigma_{KL} E_{KL} + \beta_Q E_Q + \\ & \frac{1}{2} \Sigma_{KLMN} E_{KL} E_{MN} + \gamma_{SN} A_S A_N + \frac{1}{2} \beta_{QN} E_Q E_N + \\ & \lambda_{KLQ} E_{KL} E_Q + \frac{1}{3} \beta_{QNS} E_Q E_N E_S + \\ & \frac{1}{2} \lambda_{KLMNQ} E_{KL} E_{MN} E_Q + \\ & \alpha_{KLSN} E_{KL} A_S A_N + \dots \end{aligned} \quad (97)$$

ifadesi bulunur. Bu denklemdaki katsayıların sadece sıcaklığa bağlı olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \Sigma_0 = & \Sigma(0,0), \quad \Sigma_{KL} = \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \right|_0, \\ \beta_Q = & \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial E_Q} \right|_0, \quad \gamma_{SN} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial A_S \partial A_N} \right|_0, \\ \beta_{QN} = & \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_Q \partial E_N} \right|_0, \quad \lambda_{KLQ} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial E_Q} \right|_0, \\ \beta_{QNS} = & \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial E_Q \partial E_N \partial E_S} \right|_0, \\ \lambda_{KLMNQ} = & \left. \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial E_{MN} \partial E_Q} \right|_0, \\ \alpha_{KLSN} = & \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial A_S \partial A_N} \right|_0, \\ \lambda_{KLQN} = & \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial E_Q \partial E_N} \right|_0, \\ \xi_{SNQ} = & \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial A_S \partial A_N \partial E_Q} \right|_0 \end{aligned} \quad (98)$$

E_{KL} tansörünün simetrisi ve (98) ifadelerindeki tanımlarda yer alan türevlerin sıraya bağlı olmaması nedeniyle, bu katsayılar aşağıda verilen simetri özelliklerini taşırlar.

$$\begin{aligned} \Sigma_{KL} = & \Sigma_{LK}, \\ \Sigma_{KLMN} = & \Sigma_{LKMN} = \Sigma_{KLN M} = \Sigma_{MNKL} \\ \gamma_{SN} = & \gamma_{NS}, \beta_{QN} = \beta_{NQ}, \lambda_{KLQ} = \lambda_{LKQ} \\ \beta_{QNS} = & \beta_{NQS} = \beta_{QSN} = \beta_{SNQ} \\ \lambda_{KLMNQ} = & \lambda_{LKMNQ} = \lambda_{KLNMQ} = \lambda_{MNKLQ} \\ \alpha_{KLSN} = & \alpha_{LKSN} = \alpha_{KLNS}, \xi_{SNQ} = \xi_{NSQ}, \\ \lambda_{KLQN} = & \lambda_{LKQN} = \lambda_{KLNQ} \end{aligned} \quad (99)$$

Uzamaz fiber aileli sıkışmaz ortamlar için elastik gerilmenin bünye denklemini (91) den, polarizasyon alanını da (75) den alabiliriz:

$${}_E \bar{T}_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{PR}} \quad (100)$$

$$\Pi_K = -\frac{\partial \Sigma}{\partial E_K} \quad (101)$$

şeklinde verilmişti. (100) ve (101) deki türevler (97) den alınıp yerlerine konduğunda,

$$\begin{aligned} {}_E \bar{T}_{PR} = & -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \\ & \lambda_{PRQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N + \lambda_{PRQN} E_Q E_N \end{aligned} \quad (102)$$

$$\Pi_R = -[\beta_{RQ}E_Q + \lambda_{KLR}E_{KL} + \beta_{RQN}E_QE_N + 2\lambda_{KLQR}E_{KL}E_Q + \xi_{SNR}A_SA_N] \quad (103)$$

elde edilir. Buna göre; tek fiber aileli, viskoelastik, anizotrop bir ortamda, ortamın sıkışmaz, fiber ailesinin uzamaz olduğu ve mekanik etkileşimlerin lineer, elektro-mekanik etkileşimlerin nonlineer kabul edildiği bir durumda *elastik gerilme* ve *polarizasyon* için bünye denklemleri maddesel koordinatlarda bileşenleri cinsinden (102) ve (103) ifadeleri ile ifade edilmiştir.

Elastik gerilme için (102) bünye denkleminde sağ taraftaki birinci ve ikinci terimler sırasıyla ortamın sıkışmazlığından ve fiber ailesinin uzamazlığından kaynaklanmaktadır. p , hidrostatik basıncı T_a ise fiber germesini göstermekte olup her ikisi de alan denklemleri ve sınır şartlarından tayin edilir. Bu iki terim reaksiyon gerilmeleri olup herhangi bir bünye denklemiyle ifade edilemezler. Üçüncü terim klasik Hooke kanunundaki terim olup gerilmeye genleme tansörü ile katkıda bulunur. Dördüncü terim piezoelektrik etkiden kaynaklanan gerilmeyi, beşinci terim fiber alanının ve son terim ise elektrik alanının nonlineer etkisinin oluşturduğu gerilmeyi göstermektedir. Ayrıca (102) deki en son terim elektrik alanına göre karesel olup elektrik alanının kuvvetli olması durumunda ortaya çıkan bir etkidir. Lineer teoride bu terim mevcut değildir.

Polarizasyon alanının bünye denklemini veren (103) ifadesine dikkat edilirse, elektrik alanının ve genleme tansörünün lineer, elektrik alanının nonlineer etkilerinin, genleme tansörü ile elektrik alanının birlikte etkileşiminin ve fiber dağılımının sözü edilen ortamda polarizasyon alanının oluşumuna katkıda bulunduğu görülmektedir. Burada birinci terim bilinen elektriksel duyarlılığı, ikinci terim ise piezoelektrik etkiyi göstermektedir (*Piezoelektrik* terimi bu çalışmada deformasyon alanı ile elektrik alanının tüm etkileşimlerinin cümlesi için kullanılmıştır). Üçüncü terim, polarizasyona nonlineer elektriksel katkıyı belirler. Dördüncü terim de geliştirilmiş anlamda yine piezoelektrik özelliğin katkısını göstermektedir. Beşinci terime gelince, bununla ilgili iki türlü yorum oluşturulabilir. Birincisi, ortam hiçbir şekilde yüklenmediğinde ($E_K = 0$, $E_{KL} = 0$) elektriksel polarizasyona uğramayacağı için fiziksel olarak $\xi_{SNR} = 0$, alınmalıdır.

Çünkü sadece fiberlerle yüklenmiş bir ortam kendiliğinden polarize olamaz. Diğer bir yorum ise şöyle olabilir. Ne bu çalışmamızda ve ne de fiber-takviyeli ortamların *makroskopik* davranışlarını inceleyen diğer çalışmalarda fiber kesit kalınlığı ile ilgili hiçbir parametre kullanılmamaktadır. Diğer bir deyişle fiber dağılımı sadece anizotropi oluşturan topolojik bir varlık olarak ortamda yer almaktadır. Yani tamamen geometriktir. Bu açıdan fiber takviyesini moleküler boyutlarda yapmamızı engelleyen hiçbir kısıtlama

yoktur. Bu nedenle ortam içine pratik olarak moleküler zincir yapısında bir dağılım konabilirse bunun pekala başka hiçbir etki olmadan mevcut iyonik dağılımı değiştirerek ortamı polarize edebileceğini düşünmemiz mümkündür. Bu durumda beşinci terimdeki ξ_{SNR} katsayısı sıfırdan farklı olur ve fiziksel olarak böyle bir anlam kazanır. Daha önceki fiber takviyeli ortamlarla ilgili çalışmalar sadece mekanik etkileri dikkate almış oldukları için yukarıdaki terimler özel olarak ilk defa bu şekilde yorumlanmıştır. Aynı mülahazalar, (102) nin beşinci terimi içinde geçerli olup dislokasyon uyarmalı iç-gerilme katkısı olarak yorumlanabilir.

Bu çalışmada, (102) ve (103) denklemlerindeki terimler söz konusu kabuller altında ortaya çıkmış olup *özel hallerde* bilinen klasik ifadelerle indirgenmektedir. Bu da, oluşturduğumuz modelin güvenilirliğini sağlamakta olduğu görüşümüzü desteklemektedir. Bu yeni terimler biyolojik bir yapı elemanı için olsun, veya fabrikasyon kompozitler için olsun, tamamen keyfi bir takviye dağılımını kapsayacak nitelikteki malzemeler için de geçerli sayılacak tarzda oluşturulan matematiksel modelde elastik gerilme ve polarizasyon alanı için bünye denkleminin maddesel koordinatlardaki ifadeleridir.

7. DISSİPATİF GERİLMENİN TAYİNİ

Dissipatif gerilme için verilen (79) ve (80) denklemlerindeki C_{KL} ve $\dot{C}_{KL}$ tansörleri, E_{KL} ve $\dot{E}_{KL}$ tansörleri cinsinden ifade edildiğinde bu denklemler

$${}_D\bar{T}_{KL} = {}_D\bar{T}_{KL}(E_{KL}, \dot{E}_{KL}, A_K, E_K) \quad (104)$$

$${}_D\bar{T}_{KL} = {}_D\bar{T}_{KL}(E_{KL}, 0, A_K, E_K) = 0 \quad (105)$$

şeklinde yazılabilir. Dissipatif gerilme için bünye denklemi, daha önce Σ için yapılan yaklaşıma paralel olarak bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden Taylor serisine açılıp benzer işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned} {}_D\bar{T}_{PR}(\underline{E}, \underline{\dot{E}}, \underline{A}, \underline{E}) = & \Gamma_{PR} + G_{PRKL}E_{KL} + \\ & \Gamma_{PRMN}\dot{E}_{MN} + B_{PRQ}E_Q + H_{PRSN}A_SA_N + \\ & B_{PRQS}E_QE_S + F_{PRKLQ}E_{KL}E_Q + \\ & K_{PRMNQ}\dot{E}_{MN}E_Q + C_{PRKLSN}E_{KL}A_SA_N + \\ & F_{PRKLQS}E_{KL}E_QE_S + N_{PRMNSQ}\dot{E}_{MN}A_SA_Q \\ & + K_{PRMNQS}\dot{E}_{MN}E_QE_S + \\ & M_{PRSNQ}A_SA_NE_Q + \dots \end{aligned} \quad (106)$$

denklemi elde edilir. (105) kısıtlamasında $\dot{E}_{KL} = 0 \Rightarrow {}_D\bar{T}_{KL} = 0$ olduğuna göre (106) denklemindeki aşağıdaki katsayılar sıfır olmalıdır.

$$F_{PRKLQ} = C_{PRKLSN} = F_{PRKLQS} = M_{PRSNQ} = \Gamma_{PR} \\ = G_{PRKL} = B_{PRQ} = H_{PRSN} = B_{PRQS} = 0 \quad (107)$$

Bu kısıtlamadan sonra dissipatif gerilmeyi veren bünye denklemi aşağıdaki şekle dönüşmüş olur:

$$_D \bar{T}_{PR} = \Gamma_{PRMN} \dot{E}_{MN} + K_{PRMNQ} \dot{E}_{MN} E_Q + \\ N_{PRMNSQ} \dot{E}_{MN} A_S A_Q + K_{PRMNQS} \dot{E}_{MN} E_Q E_S \quad (108)$$

Bu denkleme dikkat edilirse, dissipatif gerilmeye katkıda bulunan terimlerin sırasıyla; **genleme hızları tansörü**, genleme hızları tansörü ile **elektrik alan vektörünün birlikte etkileşimi**, genleme hızları tansörü ve **fiber alanının etkileşimi** ve son olarak da elektrik alanının ikinci mertebeden terimleri ile genleme hızları tansörünün birlikte etkileşimlerinden oluştuğu görülmektedir.

$_D \bar{T}_{KL}$ ve $\dot{E}_{KL}$ tansörlerinin simetrilerinden ve açılım terimlerdeki türevler sıraya bağlı olmadığı için bu kat-sayılar aşağıdaki simetri özelliklerini taşır.

$$K_{PRMNQS} = K_{RPMNQS} = K_{PRNMQS} = K_{PRMNSQ} \\ N_{PRMNSQ} = N_{RPMNSQ} = N_{PRNMSQ} = N_{PRMNQS} \\ K_{PRMNQ} = K_{RPMNQ} = K_{PRNMQ} \\ \Gamma_{PRMN} = \Gamma_{RPMN} = \Gamma_{PRNM} \quad (109)$$

(102) ifadesiyle verilen elastik gerilme ile (108) ifadesiyle verilen dissipatif gerilme denklemleri (81) denkleminde yerlerine yazılırsa simetrik gerilme için bünye denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{T}_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \\ \lambda_{PRQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N + \lambda_{PRQN} E_Q E_N + \\ \Gamma_{PRMN} \dot{E}_{MN} + K_{PRMNQ} \dot{E}_{MN} E_Q + \\ N_{PRMNSQ} \dot{E}_{MN} A_S A_Q + \\ K_{PRMNQS} \dot{E}_{MN} E_Q E_S \quad (110)$$

(110) ifadesiyle verilen simetrik gerilme ile (103) ifadesiyle verilen polarizasyon alanı (84) denkleminde yerlerine yazılırsa asimetric gerilme aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$T_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \\ \lambda_{PRQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N + \lambda_{PRQN} E_Q E_N + \\ \Gamma_{PRMN} \dot{E}_{MN} + K_{PRMNQ} \dot{E}_{MN} E_Q + \\ N_{PRMNSQ} \dot{E}_{MN} A_S A_Q + K_{PRMNQS} \dot{E}_{MN} E_Q E_S + \\ \beta_{PQ} E_Q E_M C_{MR}^{-1} + \lambda_{KLP} E_{KL} E_M C_{MR}^{-1} + \\ 2 \lambda_{KLQP} E_{KL} E_Q E_M C_{MR}^{-1} + \xi_{SNP} A_S A_N E_M C_{MR}^{-1} \quad (111)$$

Bu denklem ele alınan malzeme için söz konusu kabüller altında elde edilen gerilmenin nonlineer ifadesidir. Elektriksel etkileşimler de lineer kabul edilirse bu ifadedeki elektriksel alanının ikinci dereceden terimleri ortadan kalkar. Ancak buna rağmen bu şekilde indirgenen ifadede beşinci ve altıncı mertebeden malzeme tansörleri gözükeceğinden, elde edilecek bünye denklemleri ile problem çözmek zor olacaktır. Bu nedenle lineer bünye denklemleri aşağıdaki gibi elde edilecektir.

8. YARI – LİNEER TEORİ

Şekil değiştirmeler, $x_{k,K}$, (yer değiştirme gradyanları, $(U_{K,L})$ ve genleme hızları, $(\dot{E}_{KL})$), çok küçük kabul edildiği takdirde; (102), (103) ve (108) denklemleri ile verilen polarizasyon alanı, elastik gerilme ve dissipatif gerilme kolaylıkla lineerleştirilebilir. Lineer teoriyi elde etmek için, genleme tansörü ile şekil değiştirme hızları tansörünün;

$$\| \underline{\underline{E}} \| \ll 1 \quad \text{ve} \quad \| \underline{\underline{\dot{E}}} \| \ll 1 \quad (112)$$

tarzındaki kısıtlamalara uyduğu bilinmektedir. Bu durumda elastik gerilme, polarizasyon alanı ve dissipatif gerilmenin bünye denklemleri aşağıdaki şekillere indirgenmiş olur.

$$_E \bar{T}_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \\ \lambda_{RQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N + \lambda_{PRQN} E_Q E_N \quad (113)$$

$$\Pi_R = -[\beta_{RQ} E_Q + \lambda_{KLR} E_{KL} + \\ 2 \lambda_{KLQR} E_{KL} E_Q + \xi_{SNR} A_S A_N] \quad (114)$$

$$_D \bar{T}_{PR} = \Gamma_{PRMN} \dot{E}_{MN} \quad (115)$$

(113)-(115) denklemlerindeki 4'üncü mertebeden malzeme tansörlerinin bileşen sayıları 81'dir. Bu malzeme tansörlerinin taşıdığı simetri özellikleri (99) ve (109) ifadelerinden,

$$\Sigma_{PRMN} = \Sigma_{RPMN} = \Sigma_{PRNM} = \Sigma_{MNP R}, \\ \Gamma_{PRMN} = \Gamma_{RPMN} = \Gamma_{PRNM}, \alpha_{PRSN} = \alpha_{RPSN} = \alpha_{PRNS}, \\ \lambda_{PRQN} = \lambda_{RPNQ} = \lambda_{PRNQ} \quad (116)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadelerdeki simetri özellikleri, Σ_{PRMN} malzeme modülünün bileşen sayısını 21 e, Γ_{PRMN} , α_{PRSN} ve λ_{PRQN} malzeme modüllerinin bileşen sayılarını ise 36 ya düşürür. Ayrıca, Relaksasyon tansörü Γ_{PRMN} nin lineer tersinir termodinamikteki onsager ilkesinin sonucu olarak;

$$\Gamma_{PRMN} = \Gamma_{MNP R} \quad (117)$$

şeklinde simetri özelliğinin olduğu kabul edilmiştir. α_{PRSN} ve λ_{PRQN} malzeme modüllerindeki son iki indis iki fiber vektör alanı ile iki elektrik vektör alanına aittir. İki vektörün dış çarpımı ikinci dereceden bir tansöre denk olduğundan, bu malzeme modüllerindeki son indis çiftleri ikinci dereceden bir tansöre ait indis gibi düşünülebilir. (98) ifadesiyle tanımlanan α_{PRSN} ve λ_{PRQN} malzeme modüllerinin bu tanımlardaki türevlerin sıraya bağlı olmamasından dolayı aşağıda verilen simetri özelliklerini de taşıdıkları varsayılabilir.

$$\alpha_{PRSN} = \alpha_{SNPR} \quad \text{ve} \quad \lambda_{PRQN} = \lambda_{QNPR} \quad (118)$$

(117) ve (118) simetri şartlarından Γ_{PRMN} , α_{PRSN} ve λ_{PRQN} malzeme modüllerinin bileşen sayıları 21'e düşmüş olur.

8.1. Yarı – Lineer Bünye Denklemlerinin Uzaysal Koordinatlardaki İfadeleri

Lineer teoride $x_{k,K}$, $U_{K,L}$ ve $\dot{E}_{KL}$ büyüklüklerinin çok küçük olduğunu söylemiştik (matris normu anlamında). Bu durumda sürekli ortamların lineer teoride bilinen bağıntılarından faydalanarak ve (113)-(115) denklemlerini (93)-(95) denklemlerinde yerlerinde yazarak elastik gerilmenin, polarizasyonun ve dissipatif gerilmenin lineer bünye denklemleri uzaysal koordinatlarda,

$$E \bar{t}_{pr} = -p \delta_{pr} + T_a a_p a_r + \Sigma_{prmn} \tilde{e}_{mn} + \lambda_{prq} E_q + \alpha_{prsn} a_s a_n + \lambda_{prqn} E_q E_n \quad (119)$$

$$P_r = -(\beta_{rq} E_q + \lambda_{klr} \tilde{e}_{kl} + 2 \lambda_{klqr} \tilde{e}_{kl} E_q + \xi_{snr} a_s a_n) \quad (120)$$

$$D \bar{t}_{pr} = \Gamma_{prmn} \dot{u}_{m,n} \quad (121)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerdeki Σ_{prmn} , λ_{prq} , α_{prsn} , λ_{prqn} , β_{rq} , λ_{klr} , λ_{klqr} , ξ_{snr} ve Γ_{prmn} uzaysal malzeme tansörleri; Σ_{PRMN} , λ_{PRQ} , α_{PRSN} , λ_{PRQN} , β_{RQ} , λ_{KLR} , λ_{KLQR} , ξ_{NR} ve Γ_{PRMN} maddesel malzeme tansörleri ile aynı simetri özelliklerini taşır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Sigma_{prmn} \equiv \lambda_{pP} \lambda_{rR} \lambda_{mM} \lambda_{nN} \Sigma_{PRMN},$$

$$\lambda_{prq} \equiv \lambda_{pP} \lambda_{rR} \lambda_{qQ} \lambda_{PRQ}$$

$$\alpha_{prsn} \equiv \lambda_{pP} \lambda_{rR} \lambda_{sS} \lambda_{nN} \alpha_{PRSN},$$

$$\lambda_{prqn} \equiv \lambda_{pP} \lambda_{rR} \lambda_{qQ} \lambda_{nN} \lambda_{PRQN}$$

$$\beta_{rq} \equiv \lambda_{rR} \lambda_{qQ} \beta_{RQ},$$

$$\lambda_{klr} \equiv \lambda_{kK} \lambda_{lL} \lambda_{rR} \lambda_{RKL}$$

$$\lambda_{klqr} \equiv \lambda_{kK} \lambda_{lL} \lambda_{qQ} \lambda_{rR} \lambda_{RKLQ},$$

$$\xi_{snr} \equiv \lambda_{sS} \lambda_{nN} \lambda_{rR} \lambda_{RSN}$$

$$\Gamma_{prmn} \equiv \lambda_{pP} \lambda_{rR} \lambda_{mM} \lambda_{nN} \Gamma_{PRMN} \quad (122)$$

Σ_{prmn} , λ_{klr} , λ_{klqr} ve Γ_{prmn} katsayılarının;

$$\Sigma_{prmn} = \Sigma_{prnm}, \quad \lambda_{klr} = \lambda_{lkr}, \quad \lambda_{klqr} = \lambda_{lkqr},$$

$\Gamma_{prmn} = \Gamma_{prnm}$ şeklindeki simetriteri nedeniyle (119)-(121) denklemleri yer değiştirme gradyanı ve yer değiştirme gradyanının türevi cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E \bar{t}_{pr} = -p \delta_{pr} + T_a a_p a_r + \Sigma_{prmn} u_{m,n} + \lambda_{prq} E_q + \alpha_{prsn} a_s a_n + \lambda_{prqn} E_q E_n \quad (123)$$

$$P_r = -(\beta_{rq} E_q + \lambda_{klr} u_{k,l} + 2 \lambda_{klqr} u_{k,l} E_q + \xi_{snr} a_s a_n) \quad (124)$$

$$D \bar{t}_{pr} = \Gamma_{prmn} \dot{u}_{m,n} \quad (125)$$

(123)-(125) denklemlerindeki katsayılar, sabit θ sıcaklığına bağlıdır. Bu denklemler *elastik gerilmenin, polarizasyon alanının ve dissipatif gerilmenin*, ortamın sıkışmaz, fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği tek fiber aileli, viskoelastik ve piezoelektrik anizotrop ortamda uzaysal koordinatlardaki lineer bünye denklemleridir. (123) ifadesindeki son terim elektriksel etkileşimlerin nonlineer olduğunu göstermektedir. Elektriksel etkileşimler lineer kabul edilirse bu ifadedeki son terim ortadan kalkar. Ayrıca ortam fiber takviyesiz ise bu ifade sıkışmaz piezoelektrik ortamlarda gerilme ifadesini vermektedir. (124) ifadesindeki üçüncü terim, deplasman gradyanı küçük olduğu için elektriksel etkileşimlerin lineer olması halinde ihmal edilebilir. Ayrıca (124) ifadesi ortam fiber takviyesiz ise ilk iki terimi içerecek hale indirgenebilir. (125) ifadesi, dissipatif gerilmenin uzaysal koordinatlarda lineer bünye denklemini vermektedir.

(113) ve (115) ifadeleriyle verilen elastik ve dissipatif gerilmelerin yarı-lineer bünye denklemleri (81) ifadesinde yerlerine yazılırsa, simetrik gerilmenin yarı-lineer maddesel bünye denklemi,

$$\bar{T}_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \lambda_{PRQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N + \lambda_{PRQN} E_Q E_N + \Gamma_{PRMN} \dot{E}_{MN} \quad (126)$$

şeklinde elde edilir. (126) ve (114) denklemleri (84) ifadesinde yerlerine yazılarak ele alınan anizotrop malzemede asimetric olarak ortaya çıkan yarı-lineer maddesel gerilme tansörü söz konusu kabuller altında aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \\
& \lambda_{PRQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N + \lambda_{PRQN} E_Q E_N + \\
& \Gamma_{PRMN} \dot{E}_{MN} + \beta_{PQ} E_Q E_M C_{MR}^{-1} + \\
& \lambda_{KLP} E_{KL} E_M C_{MR}^{-1} + 2\lambda_{KLQP} E_{KL} E_Q E_M C_{MR}^{-1} + \\
& \xi_{SNP} A_S A_N E_M C_{MR}^{-1} \quad (127)
\end{aligned}$$

(123) ve (125) denklemleri (83) ifadesinde yerlerine yazılırsa, simetrik gerilmenin yer değiştirme gradyanına bağlı yarı-lineer uzaysal bünne denklemi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{pr} = & -p \delta_{pr} + T_a a_p a_r + \Sigma_{prmn} u_{m,n} + \lambda_{prq} E_q + \\
& \alpha_{prsn} a_s a_n + \lambda_{prqn} E_q E_n + \Gamma_{prmn} \dot{u}_{m,n} \quad (128)
\end{aligned}$$

(128) ve (124) denklemleri (45) ifadesinde yerlerine yazılırsa, asimetrik gerilmenin yarı-lineer uzaysal bünne denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
t_{pr} = & -p \delta_{pr} + T_a a_p a_r + \Sigma_{prmn} u_{m,n} + \\
& \lambda_{prq} E_q + \alpha_{prsn} a_s a_n + \lambda_{prqn} E_q E_n + \\
& \beta_{pq} E_q E_r + \lambda_{klp} u_{k,l} E_r + 2\lambda_{klqp} u_{k,l} E_q E_r \\
& + \xi_{snp} a_s a_n E_r + \Gamma_{prmn} \dot{u}_{m,n} \quad (129)
\end{aligned}$$

Şu ana kadar yapılan işlemlerle uzaysal koordinatlarda simetrik gerilme, asimetrik gerilme ve polarizasyon vektörü (128), (129) ve (124) denklemleriyle deplasman vektörünün gradyanları, elektrik alanı ve fiber dağılımı cinsinden ifade edilmiş oldu. Elde edilen bu uzaysal bünne denklemleri kısım 4 de verilen balans denklemlerinde yerlerine yazılarak alan denklemleri bulunacaktır.

(124) denklemi (25) denkleminde yerine yazılır ve (23) ifadesi kullanılırsa, toplam elektriksel yer değiştirme vektörü aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
D_r = & -\varepsilon_0 \phi_{,r} - (-\beta_{rq} \phi_{,q} + \lambda_{klr} u_{k,l} - \\
& 2\lambda_{rklq} u_{k,l} \phi_{,q} + \xi_{rsn} a_s a_n) \\
= & -\varepsilon_{rq} \phi_{,q} - \lambda_{klr} u_{k,l} + 2\lambda_{klqr} u_{k,l} \phi_{,q} - \\
& \xi_{snr} a_s a_n \quad (130)
\end{aligned}$$

Burada aşağıdaki tanımlama yapılmıştır.

$$\varepsilon_{rq} \equiv \varepsilon_0 \delta_{rq} - \beta_{rq} \quad (131)$$

Ortamin homojen ve izotermal olduğu göz önünde bulundurularak, (130) ifadesinin diverjansı alınır ve (21) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 = D_{r,r} = & -\varepsilon_{rq} \phi_{,qr} - \lambda_{klr} u_{k,lr} + \\
& \mu_{klqr} (u_{k,lr} \phi_{,q} + u_{k,l} \phi_{,qr}) \\
& - \xi_{snr} (a_{s,r} a_n + a_s a_{n,r}) \quad (132)
\end{aligned}$$

(132) denkleminde $\mu_{klqr} \equiv 2\lambda_{klqr}$ şeklinde alınmıştır. (128) ve (124) denklemleriyle verilen simetrik gerilmenin ve polarizasyon alanının bünne denklemlerinde (23) ifadesi yerine yazılır, ortamın homojen ve izotermal olduğu göz önünde bulundurularak diverjansı alınır (54) denkleminde yerlerine yazılırsa söz konusu kabuller altında aşağıdaki alan denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = & \Sigma_{prmn} u_{m,nr} - \lambda_{prq} \phi_{,qr} + \rho_0 f_p - \\
& p_{,p} + (T_a)_{,r} a_p a_r + T_a (a_{p,r} a_r + a_p a_{r,r}) \\
& \alpha_{prsn} (a_{s,r} a_n + a_s a_{n,r}) - \\
& \lambda_{prqn} (\phi_{,qr} \phi_{,n} + \phi_{,q} \phi_{,nr}) + \Gamma_{prmn} \frac{\partial}{\partial t} (u_{m,nr}) + \\
& \beta_{rq} \phi_{,qr} \phi_{,p} - \lambda_{klr} u_{k,lr} \phi_{,p} + \\
& \mu_{klqr} (u_{k,lr} \phi_{,p} \phi_{,q} + u_{k,l} \phi_{,qr} \phi_{,p}) - \\
& \xi_{snr} (a_{s,r} a_n \phi_{,p} + a_s a_{n,r} \phi_{,p}) \quad (133)
\end{aligned}$$

(132) ve (133) ifadeleri ile u_k , ϕ , p , T_a bilinmeyenlerini ihtiva eden alan denklemleri bulunmuş olur. Bu alan denklemlerinin probleme uygun olarak verilen ilk ve sınır şartları altındaki çözümü, gözönüne alınacak sınır değer probleminin matematiksel yapısını oluşturur. Bu şekilde (132) ve (133) alan denklemlerinden oluşan sistem; (22), (30) ve (24) zıplama şartlarının muhteviyatı içinde bulunan sınır şartları ile birlikte anizotropik, lineer, viskoelastik ve keyfi fiber-takviyeli piezoelektrik ortamlar ile ilgili sınır-değer problemlerinin yönetici denklemlerini oluşturur. Adı geçen sınır şartları açıkça yazılacak olursa, $D_n = D_n^+ - \omega_f$, $n_l t_{lk} = t_k$, $E_k = E_k^+$ şeklinde olduğu kolayca gösterilebilir.

9. SONUÇLAR

Bu çalışmada, bir yaklaşım olarak gerilme potansiyelinin ve dissipatif gerilme fonksiyonunun analitik olduğu varsayılarak bağlı oldukları argümanları cinsinden Taylor serisine açılmıştır. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı ortamın nonlineerlik mertebesini belirlemiştir. Ayrıca mekanik etkileşimler lineer, elektriksel etkileşimler nonlineer kabul edilmiş ve matris malzemesi fiber boyunca yön değişimine duyarlı kaldığından fiber vektörünün dış çarpımında bileşenlerinin sadece çift sayıda olanları dikkate alınmıştır. Bu durumda elastik gerilmenin, polarizasyon alanının ve dissipatif gerilmenin non-lineer bünne

denklemleri sırasıyla (102), (103) ve (108) ifadeleriyle ortaya konmuştur. Bu denklemlerde malzemenin fiberli yapısından ve elektriksel etkileşimlerin non-lineer kabul edilmesinden dolayı yeni terimler ortaya çıkmıştır. Sözü edilen bu denklemleri kullanarak, simetrik ve asimetrik gerilmeler (110) ve (111) ifadeleriyle maddesel formda elde edilmiştir.

Yapılan bütün basitleştirici kabullere rağmen, elde edilen bünye denklemlerinin uygulamaya dönük problemlerin çözümünde kullanılması çok zor olduğundan, lineer teori oluşturulmuştur. Lineer teoride şekil değiştirme, yer değiştirme gradyanları ve genleme hızlarının çok küçük olduğu kabul edilerek, elastik gerilmenin, polarizasyon alanının ve dissipatif gerilmenin bünye denklemleri belli ölçülerde lineerleştirilmiş ve yarı-lineer bünye denklemleri maddesel koordinatlarda (113)-(115) ifadeleriyle, uzaysal koordinatlarda (123)-(125) ifadeleriyle verilmiştir. (113)-(115) ve (123)-(125) denklemleri kullanılarak da simetrik ve asimetrik gerilmelerin yarı-lineer bünye denklemleri maddesel formda (126) ve (127) denklemleriyle, uzaysal formda (128) ve (129) ifadeleriyle ortaya konulmuştur. Alan denklemlerine ulaşmak için; (124) denklemleri verilen polarizasyonun bünye denklemi, (21) ile verilen balans denkleminde, (128) denklemleri verilen simetrik gerilmenin bünye denklemi Cauchy hareket denklemi olan (54) denkleminde yerine yazılmış ve (132) ve (133) alan denklemleri bulunmuştur. Alan denklemlerinin uygulamada kullanılacak problemin yapısına uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte çözümü, göz önüne alınacak herhangi bir sınır değer probleminin yapısını oluşturacaktır.

Diğer taraftan bu alan denklemleri simetri açısından genel manada anizotropik olduklarından, herhangi bir simetriye sahip malzemelere de uygulanabilecek formattadırlar. (132) alan denklemi fiber varlığının ve elektrik alanı ile deformasyon gradyanının birlikte etkileşimlerinden kaynaklanan nonlinear etkilerin ortadan kalkması özel durumunda Eringen ve Maugin (1990) tarafından verilen denklemin solunda kalan ilk iki terime indirgenmiş olur (Eringen ve Maugin (1990), s. 243) [17]. Aynı şekilde (133) denklemi ile aynı sayfadaki lineer momentum balansı da karşılaştırıldığında, (133) denkleminin sağındaki ilk üç terimden sonraki ifadelerin fiber-takviyesi, sıkışmaz ve uzamazlık ve de nonlinear elektro-statik etkileşimlerle viskoelastik katkılardan oluştuğu görülmektedir. (132) ve (133) alan denklemlerinin bilinmeyenleri, $\phi(\mathbf{x}, t)$ ve $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ olup dört tanedir. ϕ ve $\mathbf{u}$ tayin edildikten sonra geriye dönüş yaparak $E_k = -\phi_{,k}$ denkleminde elektrik alanı; $\mathbf{u}$ da bulunduktan sonra (124) den polarizasyon; (128) den $\bar{t}_{pr}$; (129) den t_{pr} , yani toplam gerilme dağılımı tayin edilmiş olur. Gerilme dağılımı tansör alanı olarak bulunduktan sonra da istenilen kesitteki gerilme vektörünü $t_{(n)r} = n_p t_{pr}$ ifadesinden rahatça hesaplama

imkanı ortaya çıkmış olur. Burada deformasyondan sonraki $a_k(\mathbf{X}, t)$ fiber dağılımının, uzamaz-fiberler için deformasyondan önceki fiber-dağılımı cinsinden $a_k = x_{k,K} A_K(\mathbf{X})$ olarak verildiğini hatırlamak gerekir.

Ayrıca (133) nolu hareket denkleminde bakarak ortama tesir eden iç elektromekanik kuvvetleri de görmemiz mümkündür. Sağdaki terimlerin türü birim hacim başına kuvvet boyutundadır. Sağdaki ilk terim elastik deformasyonların oluşturduğu kuvvetleri, ikinci terim elektrik alan gradyanının oluşturduğu kuvveti, üçüncü terim mekanik gövdesel kuvveti, dördüncüsü basınç gradyanını, beşinci terim yine (102) ve (103) denklemlerindeki moleküler mülahazalara dayanmaktadır. Altıncı ve yedinci terimler fiber eğriliklerinden kaynaklanan kuvvet terimleri olup sekizinci ve onuncu terimler ikinci mertebeden elektrostatik kuvvetleri, dokuzuncu terim viskoelastik kuvvetleri, onbirinci ve onikinci terimler sırasıyla deformasyon alanının lineer elektrik alanı ile ve nonlinear elektrik alanı ile etkileşimlerinden doğan kuvvetleri göstermektedir. Diğer bir deyişle ortam içinde bir maddesel elemanın serbest-cisim diyagramını çizersek, bu elemanın maruz kaldığı bütün bu kuvvet katkılarını görmüş oluruz. Daha önce değindiğimiz gibi ilk ve sınır şartlarımızı uygulayabileceğimiz alan denklemlerimiz, söz konusu ortamlar için (132) ve (133) denklemlerimizdir. Bu denklemler üzerinde daha kapsamlı yorumlar yapılabilir. Bu makaleden ve izotropik matrisli dielektrikleri içeren ikinci makalemizden sonra maddesel ortam içindeki parametrik denklemleri $\mathbf{X} = \mathbf{X}(S)$ şeklinde olan muhtelif fiber dağılımları için $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ vektör alanları oluşturularak pratik problemler çözülecek ve gerekli yorumlar daha sonra somut olarak verilecektir.

KAYNAKLAR

1. Kaliske, M., "A Formulation of Elasticity and Viscoelasticity for Fibre Reinforced Material at Small and Finite Strains", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 185, 225-243, 2000.
2. Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., "A Viscoelastic model for Fiber-reinforced Composites at Finite Strains: Continuum Basis, Computational Aspects and Applications", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 190, 4379-4403, 2001.
3. Limbert, G., Taylor, M., "On the Constitutive Modeling of Biological Soft Connective Tissues: A General Theoretical Framework and Explicit Forms of the Tensors of Elasticity for Strongly Anisotropic Continuum: Fiber-reinforced Composites at Finite Strains", **International Journal of Solids and Structures**, 39, 2343- 2358, 2002.
4. Usal, M., **Biyolojik bir Konstrüksiyon Elemanı için Matematiksel Modelleme**, Doktora tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

5. Ramakrishna, S., Mayer, J., Wintermantel, E., Leong, K.W., "Biomedical Applications of Polymer-composite Materials, A Review", **Composites Science and Technology**, 61, 1189-1224, 2001.
6. Haddad, Y.M., **Viscoelasticity of Engineering Materials**, Chapman & Hall, New York, 1995.
7. Lakes, R.S., **Viscoelastic Solids**, CRC Press LLC, New York, 1998.
8. Thien, N.P., **Understanding Viscoelasticity-Basics of Rheology**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
9. Lemaitre, J., **Handbook of Materials Behavior Models. Volumes I: Deformations of Materials**, Academic Press, London, 2001.
10. Koh, S.L., Eringen, A.C., "On the Foundations of Non-linear Thermo-viscoelasticity", **Int. J. Engng. Sci.**, 1, 199-229, 1963.
11. Mulhern, J.F., Rogers, T.G., Spencer, A.J.M., "A Continuum Model for Fibre-Reinforced Plastic Materials", **Proc. Roy. Soc. A.**, 301, 473-492, 1967.
12. Spencer, A.J.M., "Continuum Theory of the Mechanics of Fibre Reinforced Composites", **International Center for Mechanical Sciences**, Course and Lecturers, nr.282, ed. by A.J.M. Spencer, Springer Verlag, Wien-New York, 1984.
13. Spencer, A.J.M., **Deformations of Fibre-Reinforced Materials**, Clarendon press, Oxford, 1972.
14. Mindlin, R.D., "Elasticity, Piezoelectricity and Crystal Lattice Dynamics", **J. of Elasticity**, 2, 217-282, 1972.
15. Parkus, H., **Electromagnetic Interactions in Elastic Solids**, Springer Verlag, Wien - New York, 425 p. 1979.
16. Kamlah, M., "Ferroelectric and Ferroelastic Piezoceramics - Modeling of Electromechanical Hysteresis Phenomena", **Continuum Mech. Thermodyn.**, 13, 219-268, 2001.
17. Eringen, A.C., Maugin, G.A., **Electrodynamics of Continua, vol. I**, Foundations and Solid Media, North - Holland, 1990.
18. Eringen, A.C., Maugin, G.A., **Electrodynamics of Continua, vol. II**, Fluids and Complex Media, North - Holland, 1990.
19. Tiersten, H.F., "On the Nonlinear Equations of Thermo-electro Elasticity", **Int. J. Engng. Sci.**, 9, 587-604, 1971.
20. Erdem, A. Ü., "A Nonlocal Viscoelastic Model for Fiber-reinforced Materials", **Euromech Colloquium 231, Constitutive Equations in Viscoelasticity-applications and Methods of Solutions**, Oct. 6-9, Smolenice Castle, Czechoslovakia, Abstracts, p.4, 1989.
21. Öntürk, N., **İki Fiber Ailesi ile Takviyeli Viskoelastik Kompozit Ortamlarda Bünye Denklemlerinin Modellenmesi**, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1989.
22. Usal, M.R., **Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışına ait Matematiksel bir Model**, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.
23. Erdem, A.Ü., Usal, M.R., "On Nonlinear Electro-elastic Behavior of Fiber-Reinforced Dielectric Media", **Bulletin of the technical University of İstanbul, (Special Issue: Şuhubi and Continuum Mechanics)**, vol. 47, 4, 105-135, 1994.
24. Şuhubi, E.S., **Sürekli Ortamlar Mekaniği-Giriş**, İ.T.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi Yayını, 1994.
25. Eringen, A.C., **Mechanics of Continua**, John Wiley & Sons, 1967.