

ANALİTİK HİYERARŞİ SÜRECİNE AİT BAZI MATEMATİKSEL KAVRAMLAR

Sebahat YETİM

G.Ü. Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Ankara.

Özet

Bu makalede Analitik Hiyerarşi Sürecinin temellerinin bir taslağı ile bu temellerin bazılarının detayı verilmektedir. Ayrıca, öncelikli özvektör çözümünün, matrislerle verilen yargıların temel ölçeği ile elde edilen önceliklerin değerlerini elde etmek için çok önemli olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bazı Matematiksel Kavramlar, Önceliklendirme, Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP)

SOME MATHEMATICAL CONCEPTS OF THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

Abstract

In this paper we give a skeletal outline of the foundations of the Analytic Hierarchy Process and some of its highlights. We also show that the principal eigenvector solution is essential for deriving the scale of priorities from the fundamental scale of judgments given in the matrix.

Keywords: Some Mathematical Concepts, In Order of Priorities, Analytic Hierarchy Process (AHP)

Giriş

AHP ile problem çözmede üç temel prensip kullanılır: Bunlar, araştırma (ayrıştırma), mukayese (karşılaştırma) ve önceliklerin sentezlenmesidir.

Ayrıştırma prensibi birbirini izleyen seviyelerden bağımsız olarak bir seviyedeki elemanlarla bir hiyerarşi oluştururken uygulanır. Bu ise tepedeki hedeften başlanan ikinci seviye, üçüncü seviye,..., şeklinde taban seviyesine kadar devam eden, bir önceki hedeften bir sonraki seviyedeki hedefi belirleyen kritere, diğer bir ifadeyle genelden başlayıp taban seviyesindeki özel alternatiflere kadar aşağı doğru yapılan bir çalışma ile olur.

Karşılaştırma hükmünün prensibi, bir üst seviyedeki kritere göre bir alt seviyedeki elemanların göreceli önceliğini veren ikili karşılaştırma matrisini inşa etmede uygulanır. Bu matrisin esas özvektörü kriterlerin önceliklerini verir.

Üçüncü prensip ise; üst seviyede karşılık gelen kriterin önceliği ile onların lokal önceliklerini aşağı doğru tartarak ve kendisini etkileyen kritere göre bir seviyedeki her bir elemanı ilave ederek elde edilen öncelikleri sentezlemede kullanılır (İkinci seviyedeki elemanlar en tepedeki hedefin ağırlığı olan birimle çarpılırlar). Bu , o elemanın bileşik veya global önceliğini verir ki bu öncelik bir alt seviyedeki elemanlar mukayese edilir ve o elemanın yerel önceliğinin tartışını (ağırlığı) verir. Böyle devam edilerek en alt seviyedeki elemanların yerel önceliğinin ağırlığı belirleninceye kadar büyük işleme devam edilir.

Dört aksiyom Analitik Hiyerarşi Sürecini yönlendirir ve "asli" olarak ikili karşılaştırma notasyonunu faydalı kılar.

A elemanları "alternatif" olarak isimlendirilen n tane elemana sahip sonlu bir küme, C de **A** daki elemanların karşılaştırılması ile elde edilen vasıfların veya özelliklerin bir kümesi olsun. C nin elemanlarına ölçütler adı verilir. Bir ölçüt ilkindir.

C deki bir ölçüt yardımıyla **A** daki elemanlar üzerinde bir "karşılaştırma" bağıntısı oluşturacağız. $>c$, C deki bir c ölçeği yardımıyla tanımlı **A** üzerinde "daha fazla tercih edilir" bağıntısı olsun. $\sim \mathcal{E}$ da yine C de C ölçütü yardımıyla tanımlanan "farksız" bağıntısı olsun. Buna göre $\forall C \in C$ için A da verilen A_i ve A_j elemanları için ya $A_i > cA_j$ veya $A_j > cA_i$ ya da $A_i \sim cA_j$ dir. Daha fazla tercih edilir veya farksızdır ifadesini belirlemek için $A_i \sim cA_j$ sembolünü kullanırız. C deki bir C ölçütüne göre tanımlanan $>c$ bağıntılarının ailesine bir ilkelik adı verilir.

B, $A \times A$ dan pozitif reel sayıların R^+ kümesine tanımlı dönüşümlerin kümesi ve $f: C \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $C \in C$ için $Pc \in f(C)$ olsun. Pc , her bir $(A_i, A_j) \in A \times A$ ikilisine bir pozitif reel sayı karşılık getirir. $Pc(A_i, A_j)$ sayısını a_{ij} ile gösterelim. Bu durumda $a_{ij} \in R^+$ dir. Her bir $C \in C$ için $(A \times A, R^+, Pc)$ üçlüsüne temel veya asli ölçek adı verilir. Buna göre bir temel ölçek, objeleri bir sayı sistemine dönüştüren bir dönüşümdür.

Tanım: Her $A_i, A_j \in A$ ve $C \in C$ için

$$A_i > cA_j \text{ dir} \Leftrightarrow Pc(A_i, A_j) = a_{ij} > 1 \text{ ise}$$

$$A_i \sim cA_j \text{ dir} \Leftrightarrow Pc(A_i, A_j) = 1 \text{ ise}$$

Eğer $A_i > cA_j$ ise $C \in C$ 'ye göre A_i, A_j ye üstündür (baskındır) denir. Böylece Pc , bir alternatifi diğer alternatif için tercihdeki güçlülüğü veya yoğunluğu temsil eder.

Aksiyom 1 (Çift taraflılık veya Geçiş Aksiyomu)

Bütün $A_i, A_j \in A$ ve $C \in C$ için $Pc(A_i, A_j) = Pc(A_j, A_i)^{-1}$ dir.

Bu aksiyom karşılaştırma matrislerinin oluşturulmasına yardımcı olur şöyle ki: Bir karşılaştırma matrisi biliniyorsa buna karşılık gelen diğer karşılaştırma matrisi de biliniyor demektir. Çünkü birisi (a_{ij}) ise diğeri (a_{ji}) dir ve $a_{ji} = (a_{ij})^{-1}$ olarak alınır. Örneğin, iki taş parçasından biri diğerinden beş kat daha ağır ise küçük olan taş parçasının ağırlığı diğerinin beşte biridir. Durum bu kadar basittir fakat bu güçlü ilişki AHP nin temelidir.

$A = (a_{ij}) = (Pc(A_i, A_j)), C \in C$ kriterine göre karşılaştırılan alternatif çiftlerin bir kümesi olsun. Pc'nin tanımından ve Aksiyom 1'den A, tersi var olan bir pozitif matristir. Obje (nesne) A da verilen karşılaştırılabilen çiftlerden alternatiflerin rölatif (göreceli) üstünlüğünün bir ölçütünü elde etme işidir.

Şimdi, karşılaştırma matrisi A ile alternatiflerin bir kümesinin rölatif (göreceli) baskınlığının nasıl elde edileceğini göstereceğiz. $R_{M(n)}$

$\forall C \in C$ için $A = (a_{ij}) \equiv (Pc(A_i, A_j))$ tersinir pozitif (nxn) tipindeki matrislerin kümesini gösterebilir. $[0,1]^n$ aralığının kendisi ile n defa kartezyen çarpımı ve $A \in R_{M(n)}$ için $W : R_{M(n)} \rightarrow [0,1]^n$ olsun. O zaman W(A) bileşenleri $[0,1]$ aralığında bulunan bir n boyutlu vektördür. $(R_{M(n)}, [0,1]^n, W)$ üçlüsü elde edilen ölçektir. Elde edilen her ölçek ilişkili iki sayı sistemi arasında bir dönüşümdür.

AHP nin önemli bir yönü tutarlılık düşüncesidir. Birisinin, bazı nesneler tarafından sahip olunan özellikler için bir ölçeği var ve bu özellikleri ölçerse o zaman bu özelliğe göre nesnelerin rölatif (göreceli) ağırlıklarının sabit olduğunu görür. Bu durumda hükümsel bir tutarsızlık yoktur. (Biri de fiziksel bir ölçeğe sahip ve onu ikili nesnelere uygularsa o zaman karşılaştırma matrisi ile ölçüt üzerinde nesnelerin rölatif önemi elde edilmesine rağmen fiziksel ölçeğin uygulanmasında bazı sapmalar (dikkatsizlikler) meydana gelebilecek ve tekrar bir tutarsızlık mevcut olacaktır). Fakat ölçeği oluşturulmayan ve ölçülmeyen bazı özelliklere göre nesneleri karşılaştırırken yani nesneleri ikiye ikiye mukayese etmek için bir ölçek geliştirmeye çalışıyoruz. Nesneler birden fazla karşılaştırma kriterine sahip olabileceklerinden ve standart bir ölçeğimiz bulunmadığından, diğer taraftan hüküm gereği rölatif değerler karşılık getirildiğinden tutarsızlıkların alâsı oluşabilir.

AHP deki tutarsızlıklar aşağıdaki gibi tanımlanır ve bu tutarsızlıkları ölçebilme imkanımız mevcuttur.

Tanım: Pc dönüşümünün tutarlı olması için gerek ve yeter şart bütün i, j, k lar için

$$Pc(A_i, A_j)Pc(A_j, A_k) = Pc(A_i, A_k)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Benzer olarak karşılaştırma matrisi A nın tutarlı olması için gerek ve yeter şart her i, j, k için $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ olmasıdır.

Şimdi hiyerarşik aksiyomlar 2, 3 ve 4 ile bunlarla ilgili tanımlara dönelim.

Kısmi sıralı bir kümede " $x < y$ ", $x < y$ ve $x \neq y$ olarak tanımlanır ve bu durumda y nin x i kapsadığı (veya x den baskın olduğu) söylenir. Eğer $x < y$ ise $x < t < y$ şartını sağlayan t nin mevcut olmadığı kabul edilir. x^- ve x^+ notasyonları ile $x^- = \{y : x < y \text{ yi kapsar} \}$ ve $x^+ = \{y : y < x \text{ i kapsar} \}$ tanımlamalarını yapalım..

H kısmi sıralı sonlu bir küme olsun. H aşağıdaki şartları sağlarsa H a bir hiyerarşi adı verilir.

- a) tek bir eleman b ve $L_k = \{b\}$ olmak üzere bazı h ve $k=1,2,...,h$ için H nın, L_k kümelerinden oluşan bir parçalanması vardır.
- b) $k = 1,2,...,h-1$ olmak üzere $x \in L_k$ ise $x^- \in L_{k+1}$ dir.
- c) $k = 2,...,h$ olmak üzere $x \in L_k$ ise $x^+ \in L_{k-1}$ dir.

Temel notasyonlar ve oluşturulan ölçekler sırası ile C ve A nın yerleri değiştirilerek $x \in L_k, x \subseteq L_{k+1}$ 'e genişletilebilirler. x^- deki elemanların x ile mukayesesi sonucu elde edilen ölçeklere lokal olarak elde edilmiş ölçek (yerel ölçek) veya x^- deki elemanlar için "yerel öncelikler" adı verilir.

Tanım: Verilen $p \geq 1$ pozitif sayısı verildiğinde, her $y_1, y_2 \in x^-$ çifti için $\frac{1}{p} \leq Pc(y_1, y_2) \leq p$ oluyorsa $x^- \subseteq L_{k+1}$ (boş olmayan) kümesine $x \in L_k$ ya göre

ρ -homojendir denir. Özellikle eşit taraflılık aksiyonumdan $Pc(y_i, y_i) = 1$ elde edilir.

Aksiyom 2 (Homojenlik Aksiyomu)

Bir H hiyerarşisi, $x \in H$ ve $x \in L$ verildiğinde, $k=1,2,..., h-1$ için $x^- \subseteq L$ ye ρ -homojendir denir.

Birbirinden çok farklı karışık elemanların karşılaştırılması beyince çok zor olduğundan homojenlik anlamlı karşılaştırmalar için çok önemlidir. Örneğin büyüklük bakımından kumun içindeki bir toz zerreciğin portakalla mukayesesi (karşılaştırılması) mümkün değildir. Farklılık büyüdüğünde ya elemanlar büyüklükleri karşılaştırabilecek şekilde gruplandırılmalıdır ya da hepsi farklı seviyelerde ele alınmalıdır.

$L_k, L_{k+1} \subseteq H$ verildiğinde $y \in x^-$ ve $x \in L_k$ için elde edilen yerel ölçek $k=2,3,\dots,h-1$ olmak üzere $\Psi_{k+1}(y/x)$ ile gösterilir. Genelliği bozmadan $\Psi_{k+1}(yx)=1$ olduğunu kabul edelim. Şimdi sütunları L_{k-1} deki elemanlara göre L_k daki elemanların yerel ölçeklerinden oluşmuş $\Psi_k(L_k/L_{k-1})$ matrisini göz önüne alalım.

Tanım: $\forall C \in \mathcal{C}$ ile A kümesi üzerinde bir temel ölçek tanımlanabiliyorsa A kümesine $\mathcal{C}$ kümesi üzerine dıştan bağımlıdır denir.

Bir üst seviyedeki kriterlere göre hiyerarşi bir seviyesindeki ilişkili elemanların süreci bir alt seviyedeki elemanların bir üst seviyedeki elemanlara olan bağımlılıklarını ifade eder, açıklar, öyle ki; aralarında karşılaştırmalar yapılabilir. Hedefler için adımlar hiyerarşi içinde en tepe seviyeye kadar karşılaştırılabilir seviyeler boyunca yukarıya doğru tekrar edilir.

Bir seviyede bulunan kriterler bir diğer seviyedeki özelliklere göre bu seviyeye bağılırlar. Endüstrideki girdi ve çıktılar aşağıdaki şekilde biçimlendirilen bir iş bağımlılık düşüncesine örnektir.

Tanım: A kümesi $\mathcal{C}$ üzerine dıştan bağımlı olsun. En az bir $A \in \mathcal{A}$ için A , A üzerine dıştan bağımlı ise A daki elemanlara $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ile içten bağımlıdır denir.

Aksiom 3 H , seviyeleri $L_1, L_2, \dots, L_h$ olan bir hiyerarşi olsun. $k=1,2,\dots,h-1$ ve her bir L_k için

1. L_{k-1}, L_k ya dıştan bağımlıdır.
2. L_k daki bütün x ler ile L_{k+1} içten bağımlı değildir.
3. L_k^{k+1}, L_{k+1} üzerine dıştan bağımlı değildir.

Aksiom 4 (Beklentiler Aksiyomu) $C \subset H - L_h, A = L_h$

Bu aksiom sadece inanışları için sebepleri olan düşünceli bireylerin kendi düşüncelerinin modelde yeterince temsil edildiğinden emin olmalarının bir ifadesidir. Bütün kriterler, alternatifler ve beklentiler (açık veya ima ile) hiyerarşi içinde temsil edilebilirler ve temsil edilmelidirler de. Bu aksiom kabul edilemez. İnsanların zaman zaman rasyonel olmayan beklentilerle beslendiği bilinir ve böyle beklentiler temin edilebilir.

Aksiom 3'deki kavramlara dayanarak şimdi bir ağırlık fonksiyonu geliştirebiliriz. Her bir $x \in H$ için

$$Wx: x^1 \rightarrow [0,1]: \sum_{y \in x^-} w_x(y) = 1$$

olacak şekilde (hiyerarşik olarak yapılandırıldığından doğası fonemenona (olağanüstü olaylara) bağlı) uygun bir ağırlık fonksiyonu vardır.

Dikkat edilirse x boştan farklı için $h=1$ en son seviyedir.

L_i kümeleri hiyerarşinin seviyeleridir ve W_x fonksiyonu x nesnesine göre bir seviyenin elemanlarının öncelik fonksiyonudur. Bazı L_k seviyeleri için $x \neq L$ olsa bile, x de olmayan L_k içindeki elemanların görüntüsünü 0 a eşit tutarak L_k ların tamamı için W_x tanımlanabilir.

Ağırlık fonksiyonu, hiyerarşi teorisinin uygulanmasında katkısı bulunanların en önemli olanlarından biridir.

Tanım Bütün $x \in L_k$ ler için $x^+ \in L_{k-1}$ ise bu hiyerarşiye tamdır denir.

Şimdi en önemli soruyu ifade edelim:

Temel Problem

Herhangi bir $x \in L_a$ elemanı ve $(\alpha < \beta)$ $S \subset L_\beta$ alt kümesi verildiğinde $k = \alpha, \dots, \beta - 1, L_k$ seviyeleri üzerinde öncelikli fonksiyonların özelliklerini yansıtan $\omega_{x,s} : S \rightarrow [0,1]$ şeklinde bir fonksiyon nasıl tanımlayabiliriz. Özel olarak $\omega_{b,L_h} : L_h \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu nedir?

Daha az teknik terimlerle, bu şöyle açıklanabilir: bir büyük b nesnesi ile bir sosyal (ekonomik) sistemi ve basit alternatiflerin bir L_h kümesi (öyleki böyle bir sistem en büyük b elemanı ve en alt L_h seviyesi ile modellenenebilir olmalı) verilsin. Herhangi bir seviyedeki elemanların önceliği ve özellikle b ye göre belirlenen L_h seviyelerinin elemanlarının öncelikleri nelerdir?

Optimizasyon bakımından elemanların herhangi bir iş bağımlılığının kaynağını tahsis etmede endüstriler arasındaki ürünlerin çakışması gibi girdi çıktı ilişkilerinde elde edilebilir. Daha yüksek önceliği olan endüstri kendisinden daha düşük önceliği olan endüstriden gelen materyal akışına bağlıdır. Bir optimizasyon iskeletinden elemanların önceliği objektif (nesnel) fonksiyonun maksimalleşmesinin tanımlanmasına izin verir ve diğer bir hiyerarşi girdi-çıkışı ilişkileri hakkında bilgi temin eder.

Şimdi yukarıda tanımlanan temel problemi çözmek için bir metod verelim. Kabul edelim ki: $Y = \{y_1, \dots, y_{m_k}\} \subset L_k$ ve $X = \{x_1, \dots, x_{m_{k+1}}\} \subset L_{k+1}$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin $X = L_{k+1}$ olduğunu $y_i \in z$ olacak şekilde bir elemanın var olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\omega_z : Y \rightarrow [0,1], \quad \omega_{y_j} : x \rightarrow [0,1], j = 1, \dots, m_k$$

öncelik fonksiyonlarını göz önüne alalım. z ye göre X inde elemanlarının öncelik fonksiyonunu inşa edelim. ω ile $\omega : X \rightarrow [0,1]$

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{m_k} w_{y_j}(X_i)w_z(y_j), \quad i = 1, \dots, m_{k+1}$$

ile tanımlı fonksiyonu gösterelim. Aşıkarak x_i nin önceliği üzerinde y_j elemanın oluşturduğu tersinir ağırlık süreci y_j nin ağırlığına x_i nin z ye göre ağırlığı ve çarpımından başka bir şey değildir.

Kolayca anlaşılmayan algoritmalar, $b_{ij} = \omega_{y_j}(x_i)$ diyerek $\omega_{y_j}(x_i)$ leri B matrisinde bir araya getirerek basitleştirilecektir. İlave olarak, $\omega_i = \omega(x_i), \omega'_j = \omega_z(y_j)$ denirse yukarıdaki formül $i = 1, \dots, n_{k+1}$ olmak üzere

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{m_k} b_{ij} \omega'_j$$

halini alır. Buna göre, ω vektörünün önceliğinden bahsedebiliriz. Gerçekten (k+1). seviyedeki B matrisinin önceliği

$$\omega = B \omega'$$

eşitliği ile verilir. Aşağıdaki teorem kolayca ispatlanabilir.

Teorem H, en büyük elemanı b ve seviyesi h olan bir tam hiyerarşi olsun. $k=1,2,\dots, h$ olmak üzere k. seviyedeki öncelik matrisi B_k olsun. $\hat{\omega}, (p-1)$. seviyede bulunan bazı z elemanlarına göre p. seviyedeki öncelik vektörü ise o zaman $p < q$ olmak üzere z ye göre q. seviyedeki ω öncelik vektörü

$$\omega = B_q B_{q-1}, \dots, B_{p+1} \hat{\omega}$$

eşitliği ile verilir.

Buna göre, b elemanına göre en düşük seviyedeki öncelik vektörü;

$$\omega = B_h B_{h-1} \dots B_2 b_1$$

olur. L_1 bir tek elemana sahip ise $b_1 = 1$ dir. Aksi halde b_1 bir belirleyici (nizam koyucu) vektördür. Burada, ikili mukayese sürecinde lineer olmama durumunun da hesaba katılması gerektiğine dikkat edilmelidir. Böyle durumlar birleştirici ağırlık süreci ile ele alınırlar.

Network Sistemleri

Çoğu zaman alternatifler kriterlere, kriterler de alternatiflere bağlıdır ve ağ girdi çıktı yaklaşımı ile daha uyumlu çalışılan bu iki kavram arasında bir dairesel döngü olmalıdır. Genellikle insanların, cevapları sadece tahmine dayansa bile, lineer hiyerarşi cinsinden ifade edilen düşüncelerini düzenlemeyi ve basitleştirmeyi tercih etseler bile, aşağıda gösterildiği gibi AHP, girdi-çıkıtlar ile uğraşmak için genelleştirilmiştir.

Bir ağ (her biri elemanların bir kümesi olan) düğümlerin ve bileşenler arasında ki iç ilişkilerin sırasını işaret eden yayların (bağların) bir kümesidir. Her bir düğümdeki elemanların önceliği, birbirine etkileyen düğümler veya elemanlara göre bu elemanların karşılaştırma matrisinin öz değerlerinin bileşenleridir. Bu tesir networkun bir yayı ile gösterilir. Böyle özdeğerlerin tamamı tesirlerin önceliğin süper matrisi (üst matrisi) olarak bilinen bir matris tanımlar. Sistemde her bir bileşene (ki bu bileşenlerin öncelikleri dikkate alınarak) karşılık gelen öz değerleri tartarak super matris bir stokastik matrise dönüştürülür. Tesirlerin önceliklerin sınırı bu matrisin en büyük kuvveti hesaplanarak elde edilir. Şekilsel olarak biz aşağıdaki tanıma sahibiz.

Tanım Bir kısmi sıralı S kümesi bir network sistemidir. Eğer,

- $k=1, 2, \dots, s$ için S'nin bir C_k parçalanması vardır.
- $k=1, 2, \dots, s$ için C_k üzerinde $x \subseteq C_k \Rightarrow ya \ x^{-1}$ veya x^+ bazı k_j için C_{k_j} içindedir ya da bir veya daha fazla k_j için $x^- \subseteq C_{k_j}, x^+ \subseteq C_{k_j}$ olacak şekilde bir sıralama vardır.
- Her bir $x \in S$ için, $\sum_{y \in x^-} \omega_x(y) = 1$ olacak şekilde uygun bir $\omega_\lambda : x^{-1} \rightarrow [0,1]$ ağırlık fonksiyonu ve $k=1, 2, \dots, s, C_k \subseteq S$ için $\omega_{(k)} : C_k^- \rightarrow [0,1]$ ağırlık fonksiyonu vardır. Burada $C_k^- = \{C_h : C_k, C_h \text{ yı örten}\}$ dir.

Şimdi index'lerin uyumluluğu ve ağırlık için hesaplama sürecine dönelim.

Ağırlık ve Tutarlılık İçin Özvektör Çözümü

(a_{ij}) matris de önceliklerin vektörünü elde etmenin sonsuz sayıda yolu vardır. Fakat tutarlılık üzerindeki vurgulama bize bir özdeğer formülüne yöneltir. a_{ij} , i alternatifinin j alternatifi üzerindeki önemini, a_{jk} da j alternatifinin k alternatif üzerindeki önemini belirtirse o zaman a_{ik} , i alternatifinin k alternatifi üzerindeki önemini belirtir. Dolayısıyla i alternatifinin k alternatifi üzerindeki önemi $a_{ij} a_{jk}$ olmalıdır. Halihazırda bir ölçeye sahip değilsek veya bazı ölçme araçlarında olduğu gibi onun uygunluğuna sahip değilsek tahminin dışında ω_i / ω_j nin kesin değerine sahip olamayız. Böylece,

problem $A' \omega' = \lambda_{\max} \omega'$ halini alacaktır. Burada $\lambda_{\max}$, özdeğerlerin en büyüğüdür veya $a'_{ji} = 1/a_{ij}$ kuvveti ile $A = (a_{ij})$ nin alt üst edilmiş olan $A' = (a'_{ji})$ nin esas özdeğeri olan en büyük değerdir. Notasyonu basitleştirmek için A karşılaştırma matrisi almak üzere $A\omega = \lambda_{\max}\omega$ şeklinde yazmaya devam edeceğiz.

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ öncelikli vektörünü (özvektörünü) elde etmek için satırların üzerinden toplam alınarak normalleştirme yapıldığında çözüm yeteri kadar geniş güçlü bir matrise geçilerek elde edilir. k. güç ve (k+1). güçten elde edilen öncelikli vektörlerinin elemanları arasındaki fark bazı ön tahminli küçük değerlerden daha az olduğundan işlem durdurulur.

Önceliklerin yaklaşık bir değerini elde etmenin kolay yolu, satırların geometrik ortasını normalleştirmektir. Bu sonuç $n \leq 3$ için özvektörlerle aynıdır. Tahmini bir sonuç elde etmenin ikinci yolu yargı matrisinin sütunlarının her bir elemanının normalleştirilmesi ve her bir satırın ortalamasının alınmasıdır.

Özvektörü elde etme işleminde kullanılan önemli uygulamalarda tedbirli olunmalıdır. Çünkü sonuçlar özvektörlere yakın olmasına rağmen yaklaşımlar sırayı tersine çevirme imkanı verebilir. Bundan dolayı kriterlerin öncelik değerleri yer değiştirebilirler. W, A'nın esas özvektörü olduğunda öncelik vektörünün keyfi bir x tahmini için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{\max}^k} A^k x = c\omega$$

eşitliğini geçerli kıldığı kolayca ispatlanabilir. Bu, aşağıdaki şekilde yorumlanabilir. Şayet yeni bir tahminle başlar ve $A/\lambda_{\max}$ ile başarılı bir şekilde işlem yapılırsa sonuç esas özvektörün bir sabitle çarpımı olur.

W nın tam değeri veya tahmini değeri normalleştirilmiş formda verildiğinde, $\lambda_{\max}$ un tam değerini veya tahmini değerini elde etmenin basit bir yolu A nın sütunlarını toplamak ve W vektörü ile sonuç vektörünü çarpmandır. Elde edilen sayı en büyük özdeğer olan $\lambda_{\max}$ değeridir veya bir tahmindir. Bu;

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = \lambda_{\max} \omega_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \omega_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{\max} \omega_i = \lambda_{\max}$$

bağıntısından elde edilir.

Şimdiki problem esas özvektör w nın ne kadar iyi bir tahmin olduğudur. Dikkat edilmelidir ki bu problemi çözerek $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ yı elde edersek girişleri ω_i / ω_j elemanlarından oluşan matris A matrisinin uygun bir tahminidir. A orijinal matrisin kendisi tutarlı olmayabilir. Gerçekten A nın girişleri geçişli olmak zorunda değildir. Yani A_1, A_2 ye tercih edilebilir; A_2, A_3 e tercih edilebilir fakat A_3, A_1 e tercih edilebilir. İstedğimiz şey tutarsızlığa göre hatanın bir ölçümüdür. Yani A nın tutarlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda_{\max} = n$ dır ve biz daima $\lambda_{\max} \geq n$ eşitsizliğine sahibiz. Bu tutarlılıktan ayıran bir gösterge olarak $\lambda_{\max} - n$ kullanılmasını önerir. Fakat $i=1, \dots, n$ olmak üzere λ_i , A nın özdeğerleri olduğundan

$$\lambda_{\max} - n = - \sum_{i=2}^n \lambda_i; \quad \lambda_{\max} = \lambda_1$$

eşitlikleri geçerli olur. $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere λ_i lerin (negatif) ortalamaları olan değeri (ki bunlardan bazıları kompleks eşlenikler olabilir) biz $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ ortalama değeri olarak alırız. $2(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ in a_{ij} tahmininde meydana gelen hata farkı olduğunu vurgulamalıyız. Bu, $\lambda_{\max}$ 'ın ifadesinde yerine konularak,

$$a_{ij} = (\omega_i / \omega_j) \in_{ij}, \in_{ij} > 0 \text{ ve } \in_{ij} = 1 + \delta_{ij}, \delta_{ij} > -1$$

şeklinde yazarak gösterilebilir. Bizi ilgilendiren hata bileşeni δ_{ij} 'dir ve ön yargılı olmayan bir tahminci için değeri $|\delta_{ij}| < 1$ dir. Temel özvektörü normalleştirmek, bir ölçüde ortaya konmuş eşsiz bir tahmini ortaya çıkarır.

Karşılaştırma matrisin tutarlılık indeksi $C.I. = \lambda_{\max} - n / n - 1$ ile verilir. (C.R) tutarlılık oranı, CI ile aşağıda verilen sayıların bir kümesi ve karşılaştırılmasıyla elde edilir. Eğer bu oran 0.10'dan daha az değilse problemi tekrar çalışmalı ve yargılar gözden geçirilmelidir.

Rastgele İndeks Sayıları

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R.İ	0	0	.58	.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Bu sayıların her biri (eğer hatanın 0,10 veya daha az olduğunu görmek ise) 1/9, 1/8,...1,...8,9 ölçekleri kullanılarak ebatı 500 olan rastgele elde edilen reciprocal matristen rastgele elde edilen tutarlılık göstergesinin bir ortalamasıdır. (0,20 hata oranı tolere edilebilir ama daha fazla değil).

Niçin % 10 tutarsızlık tolere edilebilir. Gerçekleri ortaya koymada tutarlı bir açıklama elde etmek için tutarlılığın üstünlüğü tutarlılığın ölçümünde bir hata olan tutarsızlık ya da üstünlükten kaynaklanan önemlilik sırasından farklı olmalıdır. Bu şekilde sıfırdan 1'e doğru olan ölçekte tutarsızlık aşılmamalıdır. 10 çok fazladır. İstenen %10'un hata %1 ya da % .1 gibi çok küçük yapılmamalıdır. Buna sebep ise tutarsızlığın kendisinin önemli olmasıdır. Çünkü onsuz tercih sırasını değiştiren yeni bilgi elde edilemeyecebilir. Bütün bilgilerin uygun olduğunu kabul etmek algılamada süre gelen hükümler olan tecrübelerle çelişir. O zaman, geniş çapta tutarlı bir yapının gelişimin nesnelliği bazı tutarsızlıkları kabul etmemize bağlıdır.

Bu aynı zamanda karşılaştırılan elemanların sayısının niçin küçük tutulması gerektiğini de izah eder. Eğer elemanların sayısı büyük olsaydı elemanların yerel öncelikleri küçük olacaktı ve hata bu öncelikleri önemli ölçüde değiştirebilecekti. Eğer parçaların sayısı küçükse o zaman öncelikler cevapların önem sırasını etkilemeyen küçük bir hata ile karşılaştırılabilir ve bu durumda göreceli öncelikler hemen hemen aynı kalırdı. Böyle olunca parçalar % 10'dan daha az olmalı öyle ki onların bütündeki her bir değeri %10'un üzerinde olmalı ve buna göre mesela; geri kalanlar % 1 hatayla göreceli olarak etkilenmiş olmamalıdır.

Tam bir hiyerarşi için tutarlılık göstergesi

$$C_H = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{n_{ij}+1} \omega_{ij} \mu_{i,j+1}$$

ile tanımlıdır. Burada $j=1$ için $\omega_{ij} = 1$ ve n_{ij+1} j nci seviyedeki i nci kritere göre elde edilen (j+1) nci seviyede elemanların sayısıdır.

$|C_k^-|$, C_k^- elemanlarının sayısı olsun ve $\omega_{(k)(h)}$ k ncı bileşen üzerinde, h ncı bileşenin tesirinin önceliği olsun, yani; $\omega_{(k)(h)} = \omega_{(k)}(C_h)$ veya $\omega_{(k)} : C_h \rightarrow \omega_{(k)(h)}$ olsun.

Bir hiyerarşide izlediklerimize benzer çizgiler boyunca bir sistemin bileşenlerini etiketlersek ve k nci bileşenindeki j nci elemanın üstünlüğünün sınırlılığı ω_{jk} ile tanımlanırsa

$$C_s = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^{n_k} \omega_{ij} \sum_{h=1}^{|C_k^-|} \omega_{(k)(h)} \mu_k(j, h)$$

elde edilir. Burada $\mu_k(j, h)$, h ncı bileşendeki j nci elemanına göre k ncı bileşendeki elemanların ikili karşılaştırma matrisinin tutarlılık göstergesidir (indeksidir).

Sonuç

Bu konu ile ilgilenen okuyucular bu konu hakkında pek çok kitap ve yüzlerce makale bulabilirler. Bunlar, hem grup hükümlerinin nasıl sentezleneceğini, devam eden durumlarda konuya matematiğin nasıl genelleşeceği gibi konunun detaylı ve geniş teorik gelişimini ve hem de konunun bilimde, teknolojiye, hükümet ve iş alanındaki pratik uygulamalarını içermektedirler. Faydalı bir referans olarak F. Zahedi'nin makalesi verilebilir.

Kaynaklar

1. Aczel, J. And Saaty, T.L., 1983. Procedures for Synthesizing Ratio Judgements; **Journal of Mathematical Psychology**, **27**, 93-102.
2. Expert Choice; Software Package, Decision Support Software, McLean, VA.
3. Saaty, T.L., 1980. **The Analytic Hierarchy Process**; McGraw Hill International, p.287.
4. Saaty, T.L., 1984. **Decision Making for Leaders**; Wadsworth.
5. Saaty, T.L. Absolute and Relative Measurement with the AHP.
6. Saaty, T.L., 1986. Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process; **Management Science**, **32**, 841-855.