

E^n Yarı-Öklidiyen Uzayında Yarı-Hiperregle Yüzeyler

Murat TOSUN*, Mehmet Ali GÜNGÖR*, Cemile SAMANCI**, Soley ERSOY*

*Sakarya Üni. Fen-Ed. Fak. Matematik Bl. 54100 Adapazarı, E-posta: tosun@sakarya.edu.tr

agungor@sakarya.edu.tr , sersoy@sakarya.edu.tr

**Sabancı Öğretmen Evi Beykoz / İstanbul

Özet.

E^n , n -boyutlu Öklid uzayında hiperregle yüzeyler ve IR_1^n , Minkowski uzayında time-like hiperregle yüzeyler, sırasıyla, [6] ve [7] de M. Ergüt-M. Bektaş ve M. Tosun tarafından çalışıldı. Bu makalede n -boyutlu yarı-Öklidiyen uzayda yarı-regle yüzeyleri tanıttık. Ayrıca bu yarı-regle yüzeylerin total açılabilirliği, iki boyutlu Riemann kesitinin eğriliği, Normal eğriliği ve Şekil operatörü ile ilgili teoremler ve sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler : Yarı-Öklidiyen Uzay, Yarı-Hiperregle Yüzey

Semi-Hyperruled Surfaces in the Semi-Euclidean Space E^n

Abstract .

Hyperruled surfaces in n -dimensional Euclidean space E^n and time-like hyperruled surfaces in n -dimensional Minkowski space were studied by M. Ergüt-M. Bektas and M. Tosun in [6] and [7], respectively,. In this paper we introduce semi-hyperruled surface in n -dimensional semi-Euclidean space E^n . Further, some results and theorems related with the totally developable, two dimensional Riemannian sectional curvature, Normal curvature and shape operator are given.

Keywords : Semi-Euclidean Space, Semi-Hyperruled Surface

1. Giriş

Çalışmamız boyunca bütün manifoldlar, dönüşümler, vektör alanları v.s. C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir kabul edilecektir. E^n yarı-Öklidiyen uzayının bir yarı-Riemann manifoldu M , E^n nün Levi-Civita konneksiyonu $\bar{D}$ ve M yarı-Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu da D olsun. M üzerinde her X, Y vektör alanları için

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + V(X, Y) \quad (1)$$

eşitliğini sağlayan $V(X, Y)$ tensör alanına M manifoldunun ikinci temel formu, bu eşitliğe de Gauss denklemi denir, [7]. Burada $D_X Y$ ve $V(X, Y)$ sırası ile $\bar{D}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. ξ , M nin birim normal vektör alanı olmak üzere, $\bar{D}_X \xi$ teğet ve normal bileşenleri cinsinden

$$\bar{D}_X \xi = -A_\xi(X) + D_X^\perp \xi \quad (2)$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme Weingarten denklemi denir, [6]. Burada $A_\xi, T_M(p)$ üzerinde her noktada self-adjoint ve lineer bir dönüşüm, $D^\perp$ ise $\chi^\perp(M)$ de metrik konneksiyondur. Bundan sonra A_ξ notasyonu, hem lineer dönüşümler hem de bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler için kullanılacaktır.

X ve Y , M yarı-Riemann manifoldu üzerinde iki vektör alanı, ξ da M nin birim normal vektör alanı olsun. E_ν^n uzayının metrik tensörü $\langle, \rangle$ ise,

$$\langle \bar{D}_X Y, \xi \rangle = \langle V(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi(X), Y \rangle \quad (3)$$

dır. M , E_ν^n de yarı-Riemann manifoldu ve $\chi^\perp(M)$ nin bir ortonormal bazı $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}\}$ olsun. Böylece M nin ortalama eğrilik vektörü H ,

$$H = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\dot{I}z A_{\xi_i}}{\text{boy}M} \xi_i \quad (4)$$

ile tanımlanır. $\|H\|$ ya ise M nin ortalama eğriliği adı verilir. Eğer M nin her bir p noktasında $H = 0$ ise M ye minimaldir denir, [8]. M , E_ν^n de m -boyutlu yarı-Riemann manifoldu olmak üzere $\forall x_i \in \chi(M)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ için $p \in M$ noktasında

$$R : T_M(p) \times T_M(p) \times T_M(p) \times T_M(p) \rightarrow IR$$

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) \Big|_p = \langle X_1, R(X_3, X_4)X_2 \rangle \Big|_p \quad (5)$$

şeklinde tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensör alanına Riemann eğrilik tensör alanı ve bir $p \in M$ noktasındaki değerine de M nin bu noktadaki Riemann eğriliği denir. $X = X_1 = X_3$, $Y = Y_2 = Y_4$ olmak üzere $\{X_p, Y_p\}$ ortonormal sistemi için 2-boyutlu kesitin Riemann eğriliği

$$K(X, Y) \Big|_p = \langle X, R(X, Y)Y \rangle \Big|_p \quad (6)$$

ile gösterilir, [8]. V ikinci temel form olmak üzere

$$\langle X, R(X, Y)Y \rangle = \langle V(X, X), V(Y, Y) \rangle - \langle V(X, Y), V(X, Y) \rangle \quad (7)$$

olarak elde edilir. M nin bir p noktasındaki $T_M(p)$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir alt uzayına M nin p noktasındaki tanjant düzlemi denir ve π ile gösterilir. Bu düzlem üzerinde $\forall X_p, Y_p \in \pi$ için

$$K(X_p, Y_p) = \frac{\langle R(X_p, Y_p)Y_p, X_p \rangle}{\langle X_p, X_p \rangle \langle Y_p, Y_p \rangle - \langle X_p, Y_p \rangle^2} \quad (8)$$

olarak tanımlanan K reel değerli fonksiyonuna M nin p noktasındaki kesit eğrilik fonksiyonu ve $K(X_p, Y_p)$ reel değerine de M nin p noktasındaki kesit eğriliği denir, [1].

2 Yarı-Hiperregle Yüzeyler

E_v^n , n -boyutlu yarı-Öklidiyen uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, diferensiyellenebilir bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E_v^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

olsun. α eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı olan, bir ortonormal vektör alanı sistemi, $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$ ile verilmiş olsun. Bu sistem $\alpha(t) \in E_v^n$ noktasındaki $T_{E_v^n}(\alpha(t))$ tanjant uzayının bir altuzayını gerer. Bu altuzay $E_{k,\mu}(t)$ ile gösterilirse

$$E_{k,\mu}(t) = Sp\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\} \subset E_v^n, \quad 0 \leq \mu \leq \nu$$

şeklinde k -boyutlu bir altuzay dır.

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k - \mu \\ -1, & k - \mu + 1 \leq i \leq k \end{cases} \quad (9)$$

olmak üzere, $E_{k,\mu}(t)$, $(\mu \geq 1)$ altuzayı yarı-altuzay olarak isimlendirilir. E_v^n de ν -tane time-like vektör olduğu için $E_{k,\mu}(t)$ deki time-like vektörler dışında $\nu - \mu$ tane daha time-like vektör vardır. $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n\}$, E_v^n in bir ortonormal baz vektör sistemi olmak üzere, α time-like ise $\{\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n\}$ vektör sistemindeki vektörlerden $\nu - \mu - 1$ tanesi time-like vektör ve α space-like vektör ise $\nu - \mu$ tanesi time-like vektördür. Çalışmamız boyunca $E_{k,\mu}(t)$, $\mu \geq 1$ yarı-altuzay olarak kabul edilecektir.

$E_{k,\mu}(t)$ yarı alt uzayı E_v^n in α eğrisi boyunca hareket ederken E_v^n de $(k+1)$ -boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E_v^n , n -boyutlu yarı-Öklidiyen uzayında $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş yarı-regle yüzey denir ve M^* ile gösterilir. $E_{k,\mu}(s) = Sp\{e_1(s), e_2(s), \dots, e_k(s)\}$, $\mu \leq \nu$ doğrultman uzayı ve α da yay-parametresi ile verilmiş dayanak eğrisi olsun. Bu durumda M^* yarı-regle yüzeyi

$$\varphi(s, u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha(s) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(s), \quad (s, u_1, \dots, u_k) \in I \times \mathbb{R}^k \quad (10)$$

şeklinde parametrik olarak ifade edilir. Eğer $E_{k,\mu}(s)$ yarı altuzayında $k=n-2$ ise M^* , $(n-1)$ -boyutlu yarı-regle yüzey olur ve E_ν^n in yarı-hiperregle yüzeyi olarak isimlendirilir.

Tanım 1: Bir $(k+1)$ -boyutlu M^* yarı-regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(s)$ doğrultman uzayının ortogonal yörüngelerinin birim tanjant vektörü e_0 ve bir ortonormal bir bazı da $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ olsun. Eğer her bir $p \in M^*$ noktasında

$$\text{rank}[e_0, e_1, \dots, e_k, \bar{D}_{e_0} e_1, \dots, \bar{D}_{e_0} e_k] = 2k - m \quad (11)$$

ise M^* ye m -açılabilir, $m=-1$ ise M^* yarı-regle yüzeyine açılmaz ve $m=k-1$ ise M^* ye total olarak açılabilir denir, [7].

M^* , $(n-1)$ -boyutlu yarı-hiperregle yüzeyinin $E_{(n-2),\mu}(s)$ doğrultman uzayının doğal taşıyıcı bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}\}$ ve $\mathcal{X}(M^*)$ in bir ortonormal bazı $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-2}\}$ olacak şekilde bir vektör alanı $e_o = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)$ olsun. E_ν^n yarı-Öklidiyen uzayının Levi-Civita konneksiyonu $\bar{D}$ olmak üzere,

$$\bar{D}_{e_i} e_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n-2 \quad (12)$$

dir, [3]. Bu son denklem Gauss denkleminde yerine yazılırsa,

$$V(e_i, e_j) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n-2 \quad (13)$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-2-\mu \\ -1, & n-\mu-1 \leq i \leq n \end{cases}, \quad \mu \leq \nu \quad (14)$$

ve $\langle e_0, e_j \rangle = 0$, $\langle e_0, e_0 \rangle = \varepsilon_0$ olduğundan $\bar{D}_{e_i} e_0 \perp e_j$ ve $\bar{D}_{e_i} e_0 \perp e_0$ dir. Bundan dolayı $\bar{D}_{e_i} e_0 \in \mathcal{X}^\perp(M^*)$ dir. O halde

$$\bar{D}_{e_i} e_0 = V(e_i, e_0) \quad (15)$$

dir. Kabul edelim ki $p \in M^*$ noktasında $T_{M^*}^\perp(p)$ uzayının birim normal vektör alanı $\{\xi\}$ olsun. Bu takdirde $p \in M^*$ noktasında $T_{IR_v^n}(p)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, \xi\}$ dir. ξ nin, e_i , $(0 \leq r \leq n-2)$ ye göre kovaryant türevleri $\overline{D}_{e_r} \xi$, bu baz vektörleri cinsinden yazılırsa;

$$\overline{D}_{e_r}\xi = \sum_{i=0}^{n-2} a_{r_i} e_i + b_r \xi \quad , \quad 0 \leq r \leq n-2 \quad (16)$$

şeklinde olacaktır. Böylece baz vektörleri için

$$\overline{D}_{e_r}\xi = -A_\xi(e_r) + D^\perp_{e_r}\xi \quad , \quad 0 \leq r \leq n-2 \quad (17)$$

Weingarten denklemi bulunur. Burada $\overline{D}_r \xi$, $(0 \leq r \leq n-2)$ için açık bir şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{D}_{e_0} \xi &= a_{00} e_0 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{0i} e_i + b_0 \xi \\ \overline{D}_{e_1} \xi &= a_{10} e_0 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{1i} e_i + b_1 \xi \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{D}_{e_{n-2}} \xi &= a_{(n-2)0} e_0 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{(n-2)i} e_i + b_{n-2} \xi \end{aligned} \tag{18}$$

elde edilir. Bu denklemlere Weingarten türev denklemleri denir. Eğer (3) ve (18) denklemlerini kullanılır ve $a_{i0} = \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i}$, $\langle e_0, e_0 \rangle = \varepsilon_0$, $a_{ir} = 0$, $1 \leq i, r \leq n-2$ bağıntılarını göz önüne alırsak A_ε lineer dönüşümünün matris gösterimi

$$\mathbf{A}_\xi = - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{02} & . & . & . & \mathbf{a}_{0(n-2)} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbf{a}_{01} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_2 \mathbf{a}_{02} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{n-2} \mathbf{a}_{0(n-2)} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

şeklinde bulunur. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 1: M^* , E_v^n de yarı-hiperregle yüzey olsun. M^* nin A_ξ şekil operatörüne karşılık gelen matris Lorentz anlamda simetrik matristir.

Sonuç 2: M^* , E_v^n de yarı-hiperregle yüzey ve A_ξ da ξ birim normal doğrultusu için tanımlanmış olan şekil operatörü olsun. Bu takdirde $n > 2$ için $\det A_\xi = 0$ dır.

Teorem 1 : M^* , E_v^n de yarı-hiperregle yüzey ve $p \in M^*$ noktasının bir ortonormal vektör sistemi $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_{n-2}(t)\}$ olsun. M^* nin $(e_i)_p$, $(1 \leq i \leq n-2)$ ve $(e_0)_p$ vektörleri tarafından gerilen 2-boyutlu kesitin Riemann eğriliği

$$K(e_i, e_0) = -\varepsilon_0 \varepsilon_i \langle \bar{D}_{e_i} e_0, \bar{D}_{e_i} e_0 \rangle \quad (20)$$

dir.

İspat: M^* yarı-hiperregle yüzeyinin, Riemann eğrilik tensör alanı R olmak üzere, $\{e_0, e_i\}$ tarafından gerilen kesitin eğriliği (8) denklemi ve $\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $(1 \leq i, j \leq n-2)$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$K(e_i, e_0) = \varepsilon_0 \varepsilon_i \langle R(e_i, e_0) e_0, e_i \rangle$$

olduğu görülür. Böylece (7) denkleminde

$$K(e_i, e_0) = \varepsilon_0 \varepsilon_i [\langle V(e_i, e_i), V(e_0, e_0) \rangle - \langle V(e_i, e_0), V(e_i, e_0) \rangle]$$

olur. Burada (13) denklemi yerine yazılırsa

$$K(e_i, e_0) = -\varepsilon_0 \varepsilon_i \langle V(e_i, e_0), V(e_i, e_0) \rangle$$

bulunur. Bu son eşitlikte (15) değeri yerine yazılırsa eğer

$$K(e_i, e_0) = -\varepsilon_0 \varepsilon_i \langle \bar{D}_{e_i} e_0, \bar{D}_{e_i} e_0 \rangle$$

elde edilir.

Teorem 2: M^* , E_v^n de yarı-hiperregle yüzey olsun. M^* total olarak açılabilirdir gerek ve yeter şart $K(e_i, e_0) = 0$, $(1 \leq i \leq n-2)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki M^* total olarak açılabilir olsun. Tanım 1 gereğince

$$\overline{D}_{e_0} e_i \in Sp\{e_0, e_1, \dots, e_{n-2}\} \quad (21)$$

olur. Böylece E^n nin Levi-civita konneksiyonu $\overline{D}$ olmak üzere $\{e_0(t), e_1(t), e_2(t), \dots, e_{n-2}(t)\}$ bazı için, Gauss denklemi

$$\overline{D}_{e_0} e_i = D_{e_0} e_i + V(e_0, e_i)$$

olur. Böylece (21) denkleminde dolayı $\overline{D}_{e_0} e_i \in \chi(M^*)$, $D_{e_0} e_i \in \chi(M^*)$ ve $V(e_0, e_i) \in \chi^\perp(M^*)$ olacağından

$$V(e_0, e_i) = 0$$

dir. Ayrıca (14) denklemi ve $\langle e_0, e_j \rangle = 0$, $\langle e_0, e_0 \rangle = \varepsilon_0$ eşitlikleri göz önüne alınarak $\overline{D}_{e_0} e_i \perp e_j$ ve $\overline{D}_{e_0} e_i \perp e_0$ olduğu görülür. Böylece $\overline{D}_{e_0} e_i \in \chi^\perp(M^*)$ olur. İkinci temel form simetrik olduğundan $V(e_i, e_0) = V(e_0, e_i)$ dir. Böylece (15) denklemi göz önüne alınırsa

$$\overline{D}_{e_0} e_i = V(e_i, e_0) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n-2$$

bulunur. Bu değer (20) denkleminde yerine yazılırsa eğer

$$K(e_i, e_0) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n-2$$

bulunur.

Şimdi kabul edelimki $\overline{D}_{e_0} e_i = 0$, $(1 \leq i \leq n-2)$ olsun. İkinci temel formun simetrikliği ve Gauss denkleminde

$$D_{e_0} e_i = -V(e_0, e_i)$$

olduğu görülür. Buradan $D_{e_0} e_i \in \chi(M^*)$, $V(e_0, e_i) \in \chi^\perp(M^*)$ ve $\chi(M^*) \cap \chi^\perp(M^*) = \{0\}$ olduğundan

$$\overline{D}_{e_0} e_i = D_{e_0} e_i$$

olur. Bu ifade ederki $\overline{D}_{e_0} e_i \in Sp\{e_0, e_1, \dots, e_{n-2}\}$ dir. Böylece Tanım 1 gereğince M^* total olarak açılabilir dir.

Tanım 2 : M^* , E_v^n de yarı-hiperregle yüzey ve A_ξ da M^* in her bir p noktasında şekil operatörü olsun. A_ξ nin karakteristik denklemi

$$P_{A_\xi}(\lambda) = \det(A_\xi - \lambda I_{n-1}) = 0$$

şeklinde tanımlanır, [7].

Teorem 3 : M^* , E_v^n de yarı-hiperregle yüzey ve ξ da M^* nin birim normal vektör alanı olsun. A_ξ nin karakteristik değerleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{00} \pm \sqrt{(a_{00})^2 + 4 \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_0 \varepsilon_i (a_{0i})^2}}{2} \quad (22)$$

$$\lambda_i = 0 \quad , \quad 3 \leq i \leq n-1 \text{ dir.}$$

İspat : Tanım 2 ve (19) denklemlerinden A_ξ nin karakteristik denklemleri

$$(-1)^{n-2} \lambda^{n-2} (a_{00} - \lambda) - \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-3} \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i}^2 \lambda^{n-3} = 0$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$(-1)^{n-2} \lambda^{n-3} \left(a_{00} \lambda - \lambda^2 + \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i}^2 \right) = 0$$

olduğu görülür. Böylece

$$-\lambda^2 + a_{00} \lambda + \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i}^2 = 0$$

ve

$$\lambda^{n-3} = 0$$

elde edilir. Bu son denklemler çözülürse teoremin ispatı tamamlanır. Eğer (22) ve (4) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3 : M^* yarı-hiperregle yüzeyinin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = -\frac{a_{00}}{n-1}\xi$$

dır.

Sonuç 4 : M^* , E^n de yarı-hiperregle yüzey olsun. Eğer,

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \text{ ise } M^* \text{ minimaldir.}$$

Tanım 3 : M^* , E^n de yarı-hiperregle yüzey ve A_ξ , M^* nin bir şekil operatörü olmak üzere her $X_p \in T_{M^*}(p)$ için M^* nin k_N normal eğriliği

$$k_N(X_p) = \langle A_\xi(X_p), X_p \rangle$$

dır, [7].

Teorem 3 : M^* , E^n de yarı-hiperregle yüzey olsun. M^* nin normal eğriliği

$$k_N(X_p) = x_0 \left[(n-1)\|H\|x_0 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{0i}x_i + \sum_{i=1}^{n-3} \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i}x_i + \varepsilon_0 \varepsilon_{n-2} a_{0(n-2)}x_{n-2} \right] \text{ dir.}$$

İspat : Kabul edelimki $X_p \in T_{M^*}(p)$ ve $X_p = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ olsun. (19) denklemden

$$A_\xi(X_p) = \left(\sum_{i=0}^{n-2} a_{0i}x_i, \varepsilon_0 \varepsilon_1 a_{01}x_0, \varepsilon_0 \varepsilon_2 a_{02}x_0, \dots, \varepsilon_0 \varepsilon_{(n-2)} a_{0(n-2)}x_0 \right)$$

olur. Buradan

$$\langle A_\xi(X_p), X_p \rangle = x_0 \left(a_{00}x_0 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{0i}x_i + \sum_{i=1}^{n-3} \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i}x_i + \varepsilon_0 \varepsilon_{(n-2)} a_{0(n-2)}x_{n-2} \right)$$

elde edilir. Bu son denklemden

$$\|H\| = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n-1} \varepsilon_j = \frac{a_{00}}{n-1} \varepsilon_j$$

değeri yerine yazılırsa

$$k_N(X_p) = x_0 \left[(n-1) \|H\| x_0 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{0i} x_i + \sum_{i=1}^{n-3} \varepsilon_0 \varepsilon_i a_{0i} x_i + \varepsilon_0 \varepsilon_{(n-2)} a_{0(n-2)} x_{n-2} \right]$$

bulunur.

Böylece, eğer $x_0 = 0$ ise aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4 : Birinci bileşenleri sıfır olan vektörlerin yönleri asimptotiktir.

3 Sonuçlar ve Tartışmalar

[6] da M. Ergüt ve M. Bektaş, tarafından E^n Öklid uzayında hiperregle yüzeylerin eğrilikleri incelenmiştir. Daha sonra [7] de IR_1^n Minkowski uzayında incelenmiş olan hiperregle yüzeylerle ilgili eğrilikler ve bazı karakterizasyonların, IR_V^n yarı-Öklidiyen uzayında karşılıkları incelenmiştir. Bunun neticesinde IR_V^n de yarı-hiperregle yüzey kavramı tanıtılmış ve bu yarı-hiperregle yüzeyin minimallik ve total açılabilirliği ile ilgili bazı karakteristik özellikler verilmiştir. Bu çalışma Yrd. Doç. Dr. H. Balgetir tarafından doktora tezinde null yüzeylere uygulamış ve bazı karakteristik sonuçları tezinde verilmiştir.

Kaynaklar

1. B.O'Neill, "Semi-Riemannian Geometry" Academic Press, New York, London, 1983
2. B.Y. Chen, "Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker" New York 1973.
3. C. Ekici, "Yarı-Öklidiyen Uzaylarda Genelleştirilmiş Yarı-Regle Yüzeyler" Doktora Tezi, Orhangazi Üniversitesi, Mart-1998
4. C. Thas, "Minimal Monosystems" Yokohama Mathematical Journal. Vol. 26, 1978
5. I. Aydemir, Ph.D.Thesis, Ondokuz Mayıs University, Graduate School of Natural and Applied Science (1995)
6. M. Ergüt ve M. Bektaş, "On Curvatures of Ruled Hypersurfaces in E^n " F.Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi 1995 7(2), 101-
7. M. Tosun, "On Time-Like Hyperruled Surfaces In The Minkowski n-Space IR_1^n " Recent Advances in Applied and Theoretical Mathematics, Vol. 122, Greece, 2000
8. S. Kobayashi, and K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry" Vol. I-II Interacience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1963.