

DOĞRULUK TABLolarına İlişkin Yeni İşlemler

Yücel YÜKSEL *

NEW OPERATIONS ON TRUTH TABLES *

Öz

“Doğruluk Tablolarına İlişkin Bazı Tespitler” adlı çalışmamızda, artık çoğu mantıkçının inceleme konusu yapmadığı ve neredeyse standart hale gelmiş bir düzende anlattığı doğruluk tablolarını ve bu tablolar yardımıyla uygulanan geçerlilik denetleme yöntemini ayrıntılı bir biçimde incelemeye çalışmış, ayrıca bu işlemlerde kolaylık sağlayacağını düşündüğümüz bir takım önerilerde bulunmuştuk. Aynı konuya ilişkin yeni tespitlerimizi paylaşmak üzere hazırladığımız bu çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikli olarak ilgili makaledeki önerilerimiz kısaca tekrar edilecek sonrasında bu öneriler üzerine bina ettiğimiz yeni işlemler anlatılmaya çalışılacaktır. Bunun için izlenecek yol şu şekildedir: İlk mümkün doğruluk durumları ve bunların daha basit şekilde ifade edilebilmesi için önerdiğimiz yeni yazım biçimi gösterilecektir. Ardından, bir konuşma evreninde herhangi bir önermenin doğruluk sütununu (sıra sayısının bilinmesi kaydıyla), diğer önermelerin doğruluk sütunlarından bağımsız bir şekilde tespit edebilmemizi sağlayan bir formül önerilecektir. Makalenin son kısmında ise çok değerli mantıklarda kullanılagelen aritmetik işlemlerden hareketle belirlediğimiz ancak sadece iki değerli mantık için kullanılabilecek aritmetik işlemler yardımıyla, çıkarımların geçerliliğini ve tutarlılığını denetlemek için kullanılan doğruluk tablosu yönteminin ‘n’ sayıda önerme içeren bir konuşma evreninde nasıl tatbik edilebileceği izah edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Doğruluk tabloları, temel doğruluk sıralamaları, çok değerli mantık, iki değerli mantık için aritmetik işlemler, benzetim işlemleri.

* İstanbul Üniversitesi, Felsefe Bölümü, Doç.Dr., e-mail:yucelyuksel@yucelyuksel.com.

* Orijinali İngilizce olan makalenin Türkçesi de yazar tarafından hazırlanmıştır.

Abstract

In our previous study called as “Some Determinations on Truth Tables”, we have comprehensively studied truth tables and validity examination method which are applicable by the assistance of the truth tables that is not seen as a research subject and lectured in an almost standardized order by many of the logicians. We have also suggested a few propositions which provide simplicity in the application of these processes. In this study, we have planned to share new determinations which ease the processes on the same subject. But first of all, we are going to repeat some of our suggestion in the mentioned article as a brief, and then we will mention new processes, is built on the suggestions in our previous study in order to clarify the understanding on the subject. For this we should follow this path: First of all, we will show the contingent truth conditions and the new spelling format which we suggest in order to express these more simply. Afterwards we will suggest a formula by which we can determine the truth column of any proposition in a universe of discourse (provided that the array number is known) independent of the truth columns of other propositions. In the last part of the essay we will explain how the truth table method which is used for testing the validity and consistency of propositions can be used in a universe of discourse with ‘n’ number of propositions; we will do this with the help of arithmetical operations used only in two-valued logic but which we designated from arithmetical operations used in multi-valued logics.

Keywords: truth tables, fundamental truth series, multi-valued logic, arithmetical operations for two-valued logic, simulation operations.

1. Mümkün Doğruluk Durumları

Doğruluk tablolarının hazırlanmasında öncelikle tespiti gereken, bir çıkarıma ait konuşma evreni içerisinde yer alan önermelerin kaç mümkün doğruluk durumu oluşturduğudur. **Doğru** ve **Yanlış** gibi iki doğruluk değeri taşıyan bir konuşma evreni için mümkün doğruluk durumu sayısı

2^n 'dir. Bu formüldeki 2 (taban) doğruluk değeri sayısını¹, n ise ilgili konuşma evrenindeki önerme sayısını ifade eder. Bu formüle göre “p” gibi tek bir önerme $2^1=2$, “p” ve “q” gibi iki önerme $2^2=4$, “p”, “q” ve “r” gibi üç önerme ise $2^3=8$ farklı doğruluk durumu oluşturur. Tabloların hazırlanışında ikinci önemli husus önermelerin doğruluk değerlerinin nasıl sıralanması gerektiğidir. Önerme sayısı ne olursa olsun, ilk önermenin tablosu, mümkün doğruluk durumu sayısının yarısı kadar **Doğru** ile yarısı kadar **Yanlış**’ın artarda sıralanmasıyla, son önermenin tablosu ise **1 Doğru** ve **1 Yanlış**’ın mümkün doğruluk durumu sayısının yarısı kadar ardı ardına tekrarı ile elde edilir. Arada kalan önermelerin doğruluk sütunları, konuşma evrenindeki sıralarına göre, ya ilk önermenin doğruluk sütunundaki katsayıların nispi azaltılması ya da son önermenin doğruluk sütunundaki katsayıların nispi arttırılması ile elde edilir. Örnek olarak sırasıyla “p”, “q” ve “r” ile temsil edilen üç farklı önermeden oluşan bir konuşma evreni için doğruluk tablosu şu şekilde olacaktır:

p	q	r
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

tablo 1

Tabloda görüldüğü üzere ilk önerme “p” sırasıyla **4 Doğru, 4 Yanlış**, ikinci önerme “q” sırasıyla **2 Doğru, 2 Yanlış, 2 Doğru, 2 Yanlış**, üçüncü ve son önerme olan “r” ise sırasıyla **1 Doğru, 1 Yanlış, 1 Doğru, 1 Yanlış, 1 Doğru, 1 Yanlış, 1 Doğru, 1 Yanlış** değerlerini almaktadır.

Bu tablo, söz konusu önermelerin değillenmiş halleriyle genişletildiğinde ise şu tablo ortaya çıkar:

¹ Bundan sonra anlatılacak konularda aksi belirtilmedikçe iki değerli mantık sistemi esas alınacaktır.

p	p'	q	q'	r	r'
D	Y	D	Y	D	Y
D	Y	D	Y	Y	D
D	Y	Y	D	D	Y
D	Y	Y	D	Y	D
Y	D	D	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y	D
Y	D	Y	D	D	Y
Y	D	Y	D	Y	D

tablo 2

Yukarıda bahsettiğimiz sıralama prensibine riayet edildiğinde üç ya da daha az önermeden oluşan bir çıkarım için doğruluk tablosu hazırlamak gayet kolaydır ancak önerme sayısı arttıkça tablo hazırlamak bir hayli zorlaşacak, küçük çıkarımlar için hiç zahmetli olmayan bu işlem, büyük çıkarımlarda ciddi zorluklar yaşatacaktır. Aşağıda **tablo 3** üzerinde gösterimini yapacağımız yeni yazım biçimi, bu soruna kısmi de olsa bir çözüm gibi görünmektedir. Böyle bir yazımla, önerme sayısı ne olursa olsun her önermenin “D]Y” dizilimini tek bir satırda veren bir tablo hazırlamak mümkün olmaktadır²:

p	q	r
4D]4Y	2(2D]2Y)	4(D]Y)

tablo 3

Bu tablonun, söz konusu önermelerin değilleriyle genişletilmiş hali ise şu şekildedir:

p	p'	q	q'	r	r'
4D]4Y	4Y]4D	2(2D]2Y)	2(2Y]2D)	4(D]Y)	4(Y]D)

tablo 4

² Anlaşılabacağı üzere bu yeni yazım biçimindeki rakamlar doğruluk değerlerinin tekrar sayısını vermektedir.

Tabloların hazırlanışı ile ilgili yukarıda yapmış olduğumuz izahatı, aritmetiğin dilini kullanarak **n** sayıda önermeden oluşan bir konuşma evreni için şu şekilde genelleştirebiliriz:³

Belirli bir sıra düzenine göre **n** sayıda önerme içeren bir konuşma evreni için hazırlanacak tabloda ilk önerme olan “p” sırasıyla $(2n/2)D](2n/2)Y$ değerlerinden oluşacaktır. Ondan sonra gelen önerme olan “q”nun doğruluk değerleri $2((2^n/4)D](2^n/4)Y)$ şeklinde sıralanacaktır. Son yani **n** no’lu önermenin gösterimi ise her durum için $(2^n/2)(D]Y)$ olmaktadır. Örnek olarak beş önermeli bir konuşma evreni için mümkün doğruluk durumlarının sayısı 2^5 yani 32’dir. Buna göre “p”nin doğruluk sütunu $(2^5/2)D](2^5/2)Y = (32/2)D](32/2)Y$ gereği 16D]16Y şeklinde düzenlenir. İkinci önerme olan “q”nun doğruluk sütunu $2((2^5/4)D](2^5/4)Y)$ gereği 8D]8Y’in ardı ardına iki kez yazılmasıyla elde edilir. Önerme sayısı arttıkça yukarıda vermiş olduğumuz formüllerdeki katsayılar nispi olarak değişeceğinden üçüncü önermenin doğruluk sütunu $4((2^5/8)D](2^5/8)Y)$ gereği 4D]4Y’in ardı ardına dört kez yazılmasıyla, dördüncü önermenin doğruluk sütunu $8((2^5/16)D](2^5/16)Y)$ gereği 2D]2Y’in ardı ardına sekiz kez yazılmasıyla, beşinci ve son önermenin ise $(2^5/2)(D]Y)$ gereği D]Y’in ardı ardına on altı kez yazılmasıyla elde edilecektir.

x’in önermenin sıra sayısını gösterdiği varsayıldığında, yukarıdaki formüllerde **bölen** durumundaki sayı yerine 2^x , doğruluk değeri sıralamalarının tekrar sayısı yerine ise $2^{x/2}$ kullanıldığında bütün önermeler için geçerli olacak şu formül elde edilir:

$$(2^{x/2})((2^n/2^x)D](2^n/2^x)Y)$$

Bu formülün biraz daha sadeleştirilmesi mümkündür:

$$(2^{x/2}) = 2^{x-1} \text{ ve } (2^n/2^x) = 2^{n-x} \text{ olduğuna göre}$$

$$(2^{x/2})((2^n/2^x)D](2^n/2^x)Y = 2^{x-1}(2^{n-x} D]2^{n-x} Y) \text{ olacaktır.}$$

$2^{x-1} = \alpha$, $2^{n-x} = \beta$ olarak alındığında ise formül en yalın haline dönüşür:

$$\alpha(\beta D]\beta Y)$$

Artık, bir konuşma evreninde yer alan herhangi bir önermenin doğruluk sütunu (bu önermenin sıra sayısının bilinmesi kaydıyla) diğer

³ Ayrıntılı bilgi ve örneklemeler için Bkz. Yücel Yüksel. “Doğruluk Tablolarına İlişkin Bazı Tespitler”, Prof. Dr. Şafak Ural’a Armağan içinde, 481-500, ed. Yücel Yüksel (İstanbul: Alfa Yayınları, 2012) 491-494.

önergelerden bağımsız bir şekilde ilgili formül kullanılarak gösterilebilecektir.

2. Dört Temel Eklem

Mümkün doğruluk durumlarını göstermek için kullanmış olduğumuz yazım yöntemi, dört temel eklem doğruluk tablosunun gösterimi için de kullanılabilir. Buna göre

p	q	^	v	→	↔
D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	Y	D	D	Y
Y	Y	Y	Y	D	D

tablo 5

tablosu şu şekli alacaktır:

p	q	^	v	→	↔
2D]2Y	2(D]Y)	D]Y]Y]Y	D]D]D]Y	D]Y]D]D	D]Y]Y]D

tablo 6

tablo 6'nın daha basit bir gösterimi, temel doğruluk sıralamaları dikkate alınarak şu şekilde yapılabilir:

D]D sıralaması için	a
D]Y sıralaması için	b
Y]D sıralaması için	b'
Y]Y sıralaması için	a'

tablo 7

kullanıldığında **tablo 6** şu şekilde gösterilebilir:

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
a]a'	2b	b]a'	a]b	b]a	b]b'

tablo 8

Bu yeni gösterimden hareketle yukarıda vermiş olduğumuz $\alpha(\beta D] \beta Y)$ formülü, $\alpha\{(\beta/2)a](\beta/2)a'\}$ şeklinde de yazılabilir. Ya da 2^{n-x} ile eşdeğer saydığımız β , $(2^{n-x}/2)$ olarak tanımlanırsa ilgili formül $\alpha(\beta a] \beta a')$ şeklini alabilir.

3. Mümkün İlişki Biçimleri

Herhangi bir konuşma evreni içerisinde yer alan önermeler kendileri, çelişikleri veya birbirleriyle herhangi bir eklem vasıtasıyla ancak belirli sayıda ilişki biçimi oluştururlar. Aşağıda üç önermeli bir konuşma evreni için mümkün ilişki biçimleri sıralanmıştır⁴:

“p”, “q” ve “r” için,

pΩp	qΩq	rΩr	pΩq	qΩp	pΩr	rΩp	qΩr	rΩq
pΩp'	qΩq'	rΩr'	pΩq'	qΩp'	pΩr'	rΩp'	qΩr'	rΩq'
p'Ωp	q'Ωq	r'Ωr	p'Ωq	q'Ωp	p'Ωr	r'Ωp	q'Ωr	r'Ωq
p'Ωp'	q'Ωq'	r'Ωr'	p'Ωq'	q'Ωp'	p'Ωr'	r'Ωp'	q'Ωr'	r'Ωq'

tablo 9

Bir konuşma evrenindeki önerme sayısı “n” ise bu konuşma evreni için mümkün ilişki biçimlerinin sayısı “ $n^2 \times 4$ ”dir. **tablo 9**'da verilen ilişki biçimlerinin sayısı $n^2 \times 4 = 3^2 \times 4 = 36$, bir başka örnek olarak beş önermeli bir evren için mümkün ilişki biçimlerinin sayısı $n^2 \times 4 = 5^2 \times 4 = 100$ olmaktadır.⁵

⁴ “Ω” herhangi bir eklemi ifade etmektedir.

⁵ Diğer açıklama ve örneklemeler için Bkz. A.g.e., 490-491.

4. Mümkün İşlemler

Önerdiğimiz yazım yöntemi ve **tablo 7**'de tanımladığımız sadeleştirmeler kullanılarak, mümkün ilişki biçimlerinin dört temel eklem uyarınca gerçekledikleri mümkün işlemler ile bu işlemler neticesinde ortaya çıkan doğruluk değerleri “p”, “q” ve “r” önermeleri için şu şekilde gösterilebilir⁶:

“p”, “q” ve “r” için

p	p'	q	q'	r	r'
2a]2a'	2a']2a	2(a]a')	2(a']a)	4b	4b'

tablo 10

4.1 “^” Eklemi

$p \wedge p = 2a]2a'$	$q \wedge q = 2(a]a')$	$r \wedge r = 4b$
$p \wedge p' = p' \wedge p = 4a'$	$q \wedge q' = q' \wedge q = 4a'$	$r \wedge r' = r' \wedge r = 4a'$
$p' \wedge p' = 2a']2a$	$q' \wedge q' = 2(a']a)$	$r' \wedge r' = 4b'$

$p \wedge q = q \wedge p = a]a']a'a'$	$p \wedge r = r \wedge p = 2b]2a'$	$q \wedge r = r \wedge q = 2(b]a')$
$p \wedge q' = q' \wedge p = a']a'a']a'$	$p \wedge r' = r' \wedge p = 2b']2a'$	$q \wedge r' = r' \wedge q = 2(b']a')$
$p' \wedge q = q \wedge p' = a']a'a]a'a'$	$p' \wedge r = r \wedge p' = 2a']2b$	$q' \wedge r = r \wedge q' = 2(a']b)$
$p' \wedge q' = q' \wedge p' = a']a'a']a'a'$	$p' \wedge r' = r' \wedge p' = 2a']2b'$	$q' \wedge r' = r' \wedge q' = 2(a']b')$

tablo 11

4.2 “v” Eklemi

$p \vee p = 2a]2a'$	$q \vee q = 2(a]a')$	$r \vee r = 4b$
$p \vee p' = p' \vee p = 4a$	$q \vee q' = q' \vee q = 4a'$	$r \vee r' = r' \vee r = 4a$
$p' \vee p' = 2a']2a$	$q' \vee q' = 2(a']a)$	$r' \vee r' = 4b'$

⁶ Bu gösterimler, “^”, “v” ve “↔” eklemelerinin yer değiştirme özelliğine sahip olduğundan kaynaklanan eşdeğerlikler dikkate alınarak yapılmıştır.

$p \vee q = q \vee p = a]a]a'a'$	$p \vee r = r \vee p = 2a]2b$	$q \vee r = r \vee q = 2(a]b)$
$p \vee q' = q' \vee p = a]a]a'a$	$p \vee r' = r' \vee p = 2a]2b'$	$q \vee r' = r' \vee q = 2(a]b')$
$p' \vee q = q \vee p' = a]a']a]a$	$P' \vee r = r \vee p' = 2b]2a$	$q' \vee r = r \vee q' = 2(b]a)$
$p' \vee q' = q' \vee p' = a']a]a]a$	$p' \vee r' = r' \vee p' = 2b']2a$	$q' \vee r' = r' \vee q' = 2(b']a)$

tablo 12

4.3 “ $\rightarrow$ ” Ekleme

$p \rightarrow p = p' \rightarrow p' = 4a$	$q \rightarrow q = q' \rightarrow q' = 4a$	$r \rightarrow r = r' \rightarrow r' = 4a$
$p \rightarrow p' = 2a']2a$	$q \rightarrow q' = 2(a']a)$	$r \rightarrow r' = 4b'$
$P' \rightarrow p = 2a]2a'$	$q' \rightarrow q = 2(a]a')$	$r' \rightarrow r = 4b$
$p \rightarrow q = q' \rightarrow p' = a]a']a]a$	$p \rightarrow r = r' \rightarrow p' = 2b]2a$	$q \rightarrow r = r' \rightarrow q' = 2(b]a)$
$p \rightarrow q' = q \rightarrow p' = a']a]a]a$	$p \rightarrow r' = r \rightarrow p' = 2b']2a$	$q \rightarrow r' = r \rightarrow q' = 2(b']a)$
$p' \rightarrow q = q' \rightarrow p = a]a]a]a'$	$p' \rightarrow r = r' \rightarrow p = 2a]2b$	$q' \rightarrow r = r' \rightarrow q = 2(a]b)$
$p' \rightarrow q' = q \rightarrow p = a]a]a]a$	$p' \rightarrow r' = r \rightarrow p = 2a]2b'$	$q' \rightarrow r' = r \rightarrow q = 2(a]b')$

tablo 13

4.4 “ $\leftrightarrow$ ” Ekleme

$p \leftrightarrow p = p' \leftrightarrow p' = 4a$	$q \leftrightarrow q = q' \leftrightarrow q' = 4a$	$r \leftrightarrow r = r' \leftrightarrow r' = 4a$
$p \leftrightarrow p' = p' \leftrightarrow p = 4a'$	$q \leftrightarrow q' = q' \leftrightarrow q = 4a'$	$r \leftrightarrow r' = r' \leftrightarrow r = 4a'$

$p \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p = p' \leftrightarrow q' = q' \leftrightarrow p' = a]a']a]a$
$p \leftrightarrow q' = q' \leftrightarrow p = p' \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p' = a']a]a]a'$
$p \leftrightarrow r = r \leftrightarrow p = p' \leftrightarrow r' = r' \leftrightarrow p' = 2b]2b'$
$p \leftrightarrow r' = r' \leftrightarrow p = p' \leftrightarrow r = r \leftrightarrow p' = 2b']2b$
$q \leftrightarrow r = r \leftrightarrow q = q' \leftrightarrow r' = r' \leftrightarrow q' = 2(b]b')$
$q \leftrightarrow r' = r' \leftrightarrow q = q' \leftrightarrow r = r \leftrightarrow q' = 2(b']b)$

tablo 14

5. Doğruluk Tablosu Yöntemi

Bu kısımda, örnek bir çıkarımın geçerliliğinin doğruluk tablosu yöntemiyle nasıl denetlendiği anlatılacaktır. Amaç, bu yöntemi, daha

sonra öneride bulunacağımız yeni aritmetik yöntemle mukayese edebilmektir.

$$[(p' \vee q) \wedge (q \wedge r')] \rightarrow \sim(p \leftrightarrow r)$$

çıkarımının doğruluk tablosu aşağıdaki gibi olacaktır:

$[(p' \vee q) \wedge (q \wedge r')]$	$\rightarrow$	$\sim$	$(p \leftrightarrow r)$
Y		D	D
Y		D	Y
Y		D	D
Y		D	Y
D		Y	D
D		Y	Y
D		Y	D
D		Y	Y

tablo 15a

$[(p' \vee q) \wedge (q \wedge r')]$	$\rightarrow$	$\sim$	$(p \leftrightarrow r)$
Y	D	Y	D
Y	D	D	Y
Y	Y	Y	D
Y	Y	D	Y
D	D	D	Y
D	D	Y	D
D	Y	Y	Y
D	D	D	Y

tablo 15b

tablo 15b üzerinde doğruluk değerlerinin, aşamaları numaralandırılarak gösterilen yazımı neticesinde, ana eklemnin yani doğruluk tablosundaki “ $\rightarrow$ ”nin doğruluk sütunu bize, örnek çıkarımın en az bir satırda **Yanlış** değeri aldığını, bu nedenle **geçersiz** olduğunu ancak en az bir satırda da **Doğru** değeri aldığı için **tutarlı** olduğunu söylemektedir.

6. Jan Lukasiewicz: Doğruluk Değeri Tespiti İçin Tanımlanmış Aritmetik İşlemler

İki değerli mantığın temel ilkelerinden birisi olan “üçüncü halin imkânsızlığı”nı dışlayarak türlü biçimlerdeki “belirsiz”liklere de birer doğruluk değeri atfeden, bazılarının iddia ettiği gibi iki değerli mantığı “bozan” değil sadece genişleten çok değerli mantık sistemlerinin ilk örneği⁷ 1920 yılında Polonyalı bir mantıkçı olan Lukasiewicz tarafından ortaya konmuştur. Zaman içerisinde Reichenbach, Gödel, Kleene ve Bochvar, Belnap, Brouwer ve Heyting vb.⁸ önemli mantıkçıların da dâhil olduğu/edildiği çok değerli mantık tartışmaları, üç doğruluk değerinden “n” sayıda doğruluk değerine uzanan geniş bir skala üzerinde, bazı mantıksal ve felsefi problemlere çözüm getireceği iddiasını taşıyan farklı mantık sistemlerinin ortaya çıkmasına zemin oluşturmıştır.⁹ Bu mantık sistemlerinin bizi ilgilendiren kısmı, temel eklemlerin sağlayacağı doğruluk değerlerinin tespiti için türlü eşdeğerlikler ve aritmetik işlemler tanımlanmış olmalarıdır. Yukarıdaki tanımda da temas ettiğimiz üzere çok değerli mantıklar iki değerli mantığın genişletilmiş halleridirler. Bu nedenledir ki önerdikleri eşdeğerlikler ve aritmetik işlemler iki değerli mantıkta da iş görmektedirler. Çalışmamızın bundan sonraki kısmında, doğruluk tablosu yönteminin uygulamasına ilişkin hesap önerilerimiz için, Lukasiewicz’in üç değerli mantığına ait aritmetik işlemlerin çağrışımlarından yararlanılacaktır.

Doğru’yu 1 (var) Yanlış’ı 0 (yok) ile ifade eden, üçüncü doğruluk değerini 1 ve 0 arasında kalan bir değer olarak varsayan Lukasiewicz sisteminde deşilleme ve dört temel eklem için önerilen aritmetik işlemler şu şekilde sıralanmaktadır¹⁰:

⁷ Burada, aynı yıl benzer bir sistem inşaa eden E. L. Post’u da anmak gerekir. Bkz. Grzegorz Malinowski, “Many-valued Logic and Its Philosophy”, *Handbook of The History of Logic vol. 8* içinde, ed. D. M. Gabbay, J. Woods (Amsterdam, Oxford: Elsevier, North-Holland, 2007), 14.

⁸ Malinowski, Puslu Mantığı (Fuzzy Logic) da çok değerli mantık sistemleri içerisinde değerlendirmekteyse de (Bkz. Malinowski, a.g.e., 70-75) bu konunun ihtilafı olduğu bilinmelidir. Bu yüzden ki sözü edilen mantık sistemini geliştirmiş olan Zadeh’in ismi burada zikredilmemiştir. Şüphesiz türlü çekincelerle ismini vermediğimiz başka önemli mantıkçılar da vardır. Ayrıntılı bilgi için Bkz. Leonard Bole, Piotr Borowik, *Many-Valued Logics 1 Theoretical Foundations* (Berlin, New York: Springer-Verlag, 1992), 63-85., ayrıca Malinowski, a.g.e., 13-94. Ural, a.g.e., 301-310.

⁹ Bkz. Şafak Ural, “Çok Değerli Mantık”, *Felsefe Arkivi*, sayı 26 (1987): 301-310.

¹⁰ Ural, a.g.e., 302.

1. $x' = (1-x)$
2. $(x \wedge y) = \min(x, y)$
3. $(x \vee y) = \max(x, y)$
4. $(x \rightarrow y) = \min(1, 1-x+y)$
5. $(x \leftrightarrow y) = \min[\min(1, 1-x+y), \min(1, 1-x+y)]$

“x” ve “y” gibi iki farklı önerme üzerinden gösterilen bu eşdeğerliklerde önermelerin her ikisi “x” ya da “her ikisi y” olsa bile doğruluk değişmeyecektir. Örneğin

$$(y \vee y) = \max(y, y) \text{ ya da} \\ (x \rightarrow x) = \min(1, 1-x+x) \text{ olacaktır.}$$

“~”i tanımlayan ilk eşdeğerlik, bir önermenin değilinin onun **1**’den “fark”ı olduğunu ifade eder.

“ $\wedge$ ” eklemini tanımlayan ikinci eşdeğerlikteki “minimum”un kısaltması olarak kullanılan “**min**” ibaresi iki önermeden küçük değerli olanın alınmasını gerektirir.

“ $\vee$ ” eklemini tanımlayan üçüncü eşdeğerlikteki “maximum”un kısaltması olarak kullanılan “**max**” ibaresi iki önermeden büyük değerli olanının alınmasını gerektirir.

“ $\rightarrow$ ” eklemini tanımlayan dördüncü eşdeğerlikteki “**min**” ibaresi, $(1-x)$ gereği x' önermesinin y ile toplamının **1** ile karşılaştırılmasını¹¹, bu iki değerden küçük olanının alınmasını gerektirir.

“ $\leftrightarrow$ ” eklemini tanımlayan beşinci ve son eşdeğerlik $(x \leftrightarrow y) = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ eşdeğerliğinden türetilmiştir. Buna göre $\min[\min(1, 1-x+y), \min(1, 1-x+y)]$ eşdeğerliğinde baştaki “**min**” $(x \rightarrow y)$ ile $(y \rightarrow x)$ önermeleri arasındaki “ $\wedge$ ” ekleminin gereğidir.

Lukasiewicz sisteminin eşdeğerlikleri gayet anlaşılır ve kullanışlıdır ancak 4. ve 5. eşdeğerlikler yerine sırasıyla, hatırdı daha kolay kalacağını

¹¹ İlgili eşdeğerlikteki $(1-x+y)$ ifadesi “x” ve “y”nin birleşiminin 1’den “fark”ı olarak da okunabilir.

ve hesaplamalarda biraz daha kolaylık sağlayacağını düşündüğümüz şu eşdeğerlikler kullanılabilir:

$$(x \rightarrow y) = \min(1, x' + y)$$

$$(x \leftrightarrow y) = \min(x' + y, x + y')$$

5. eşdeğerlik, şayet sistem içerisine aritmetikteki “mutlak değer” nosyonu dâhil edilirse çok daha basit bir biçimde ifade edilebilmektedir:¹²

$$(x \leftrightarrow y) = 1 - |x - y|$$

7. Doğruluk Tablolarında Aritmetik işlemler

Lukasiewicz sisteminin eşdeğerlikleri iki değerli mantığın doğruluk tablolarının değerlendirilmesinde de rahatlıkla kullanılabilirler. Ancak bu eşdeğerlikler “belirsiz” (ya da “mümkün”) olarak ifade edilen ve $\frac{1}{2}$ ile gösterilen¹³ üçüncü bir doğruluk değerini varsaydığından¹⁴ iki değerli mantık sistemi için hiç de gerekli olmayan, üstelik hesaplamaları da nispeten zorlaştıran kısıtlar içermektedirler. Bu nedenle işlemlerimizde, bu kısıtları içermeyecek şekilde düzenlediğimiz kısmen farklı bir eşdeğerlik seti kullanılacaktır:

1. $x' = (1 - x)$
2. $(x \wedge y) = \min(x, y)$
3. $(x \vee y) = \max(x, y)$
4. $(x \rightarrow y) = \max(x', y)$
5. $(x \leftrightarrow y) = \min[\max(x', y), \max(x, y')]$

Bu işlemlerin yapılabilmesi için öncelikle **tablo 7**'de verilmiş temel doğruluk sıralamalarının **min** ve **max** tanımlarının verilmesi gerekmektedir:

a D]D'nun gösterimidir ve **totoloj**idir. En büyük doğruluk sıralamasıdır.

a' Y]Y'm gösterimidir ve **çelişki**dir. En küçük doğruluk sıralamasıdır.

¹² Malinowski, a.g.e., 36. $|x - y|$ gösterimi “fark”ta mutlak değer alınması yani negatif sonuç çıkması durumunda bunun pozitif olarak değerlendirilmesi gerektiğini ifade eder.

¹³ Lukasiewicz bu üçüncü doğruluk değeri için ilkin “2”yi kullanmıştı. Bkz. Malinowski, a.g.e., 15.

¹⁴ A.g.e., Ural, a.g.e., 301.

b D]Y'ın **b'** Y]D'nun gösterimidir. **b** ve **b'** **min**, **max** işlemlerinde denk güçlüdür. Bu yüzden birlikte minimumları **a'**, maximumları **a** olmaktadır. Bu üç tanım tek bir formel ifadeye indirgenebilir:

$$a' < b' \equiv b < a$$

tablo 16

Artık bu tanımlar yardımıyla doğruluk tablosu yöntemiyle denetleme işleminin, önerme sayısı ne olursa olsun nasıl daha kolay ve hızlı bir şekilde yapılabileceği aşağıda gösterilmeye çalışılacaktır. Söz konusu uygulamada, önerdiğimiz eşdeğerlikler sayesinde tek tek formül yazımıyla hesaplama yapmaya gerek yoktur. Herhangi bir önermenin değillenmesi, yalın haldeki birimlerini değilllemek, değilli birimlerini yalın hale getirmekten ibarettir. 2., 3. ve 4. eşdeğerlikler için yapılması gereken, iki birim arasındaki **min** ya da **max** ilişkisini tespit etmektir. Anlaşılabacağı üzere 5. eşdeğerliğin hesabı maalesef pratik değildir. $(x \leftrightarrow y) = 1 - |x - y|$ eşdeğerliğini kullanmak da mutlaklık kısıtı taşıması sebebiyle başka sıkıntılara sebebiyet vermektedir. Tercihen $(x \leftrightarrow y)$ türü ifadelerin değerlendirilmesinde sırası gelince açıklayacağımız daha kısa bir akıl yürütme uygulanacaktır:

Örnek1: 5 önermeli bir konuşma evreninde 2. ve 4. önermelerin “→” eklemiyle birleşiminin sonucu şu şekilde olacaktır:

$2^{x-1} = \alpha$, $2^{n-x}/2 = \beta$, $\alpha(\beta a] \beta a')$ formülleri uyarınca

2. önermenin doğruluk değerleri:

$n=5$ ve $x=2$ gereği

$2^{2-1} = \alpha = 2$, $2^{5-2}/2 = \beta = 4$ olması nedeniyle

$2(4a]4a')$ 'dir

4. önermenin doğruluk değerleri:

$n=5$ ve $x=4$ gereği

$2^{4-1} = \alpha = 8$, $2^{5-4}/2 = \beta = 1$ olması nedeniyle

$8(a]a')$ 'dir

2. önermenin “x”, 4. önermenin “y” ile gösterilmesi durumunda

$(x \rightarrow y) = 2(4a]4a') \rightarrow 8(a]a')$ olmaktadır.

Herhangi iki önerme arasında bir işlem yapmak için bu önermelerin gösterimleri arasında benzerlik kurmak gerekebilir. Böylesi durumlarda,

katsayılar da **daraltma** ya da **genişletme**, ifadeleri **sadeleştirme** ya da **açma** gibi benzetim işlemleri yapılabilir. Unutulmaması gereken katsayı işlemlerinin hesap bittikten sonra muhakkak geri alınmasıdır. Buna göre:

$(x \rightarrow y)$ ifadesi $2\{(4a]4a') \rightarrow 4(a]a')\}$ şeklinde,

$2\{(4a]4a') \rightarrow 4(a]a')\}$ ifadesi de $2\{(4a]4a') \rightarrow 2(a]a')\} 2(a]a')$ şeklinde düşünülebilir.

Bu katsayı ve benzetim işlemlerinden sonra artık karşılaştırma yapılabilir. Hemen görüleceği üzere $[(4a]4a') \rightarrow 2(a]a')\} 2(a]a')$ ifadesinde birinci önermenin ilk kısmı yani **4a** ikinci önermenin ilk kısmıyla yani **2(a]a')** ile birinci önermenin ikinci kısmı yani **4a'** ikinci önermenin ikinci kısmıyla yani **2(a]a')** ile muhataptır. “ $\rightarrow$ ” eklemine ilişkin eşdeğerlik birinci önermenin değiliyle ikinci önermenin karşılaştırılması ve bunlardan büyük olanın alınması gerektiğini söylemektedir ($(x \rightarrow y) = \max(x', y)$):

$a' < a$ olduğu için

İlk kısımda belirleyici olan **2(a]a')**'dir yani $\max(4a', 2(a]a')) = 2(a]a')$ olacaktır.

İkinci kısımda belirleyici olan ise **4a'**'dir yani $\max(4a, 2(a]a')) = 4a$ olacaktır.

Bu akıl yürütmeler ile vardığımız sonuç **2(a]a')]4a** ifadesidir. Yukarıda yaptığımız katsayı**daraltma** işlemi geri alındığında yani **genişletme** yapıldığında ifade son halini alır:

$$2\{2(a]a')\}4a$$

Aynı işlemi şimdi doğruluk tablosu üzerinde gösterelim:

x	$\rightarrow$	y
D	D	D
D	D	D
D	Y	Y
D	Y	Y
D	D	D
D	D	D
D	Y	Y
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	D	Y
Y	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	D	Y
D	D	D
D	D	D
D	Y	Y
D	Y	Y
D	D	D
D	D	D
D	Y	Y
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	D	Y
Y	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	D	Y
Y	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	D	Y

tablo17

Basit bir örnek uygulama olarak yukarıda doğruluk tablosu yöntemiyle denetlemiş olduğumuz çıkarımı da önerdiğimiz yöntemle tekrar denetleyelim:

Örnek 2: $[(p' \vee q) \wedge (q \wedge r')] \rightarrow \sim(p \leftrightarrow r)$

Bu çıkarımın daha önce önerdiğimiz yazım yöntemiyle gösterimi şu şekilde olacaktır:

$$\begin{array}{ccc} [(2a']2a \vee a]a']a]a') \wedge (a]a']a]a' \wedge 4b')] \rightarrow \sim(2a]2a' \leftrightarrow 4b) \\ [(a']a']a]a \vee a]a']a]a') \wedge (a]a']a]a' \wedge (b']b']b']b')) \rightarrow \sim(2a]2a' \leftrightarrow 2b]2b) \\ \text{Açma} & \text{Açma} & \text{Açma} \end{array}$$

Öncüller Kısmı

$$[(a']a']a]a \vee a]a']a]a') \wedge (a]a']a]a' \wedge (b']b']b']b'))]$$



max max
a]a' a]a



min min
b']a' b']a'

$$a]a']a]a \wedge b']a']b']a'$$



min min
b']a']b']a' = 2(b']a')

Sadeleştirme

Öncüller Kısmı

•Birinci öncülün eklemi " $\vee$ "dir. 3. eşdeğerlik gereği, oklarla ilişkisi gösterilen birimlerinden büyük olanı alınır.

•İkinci öncülün eklemi " $\wedge$ "dir. 2. eşdeğerlik gereği, oklarla ilişkisi gösterilen birimlerinden küçük olanı alınır.

•Öncüller arasındaki eklem " $\wedge$ "dir. 2. eşdeğerlik gereği, oklarla ilişkisi gösterilen birimlerinden küçük olanı alınır.

Elde edilen ifadede b']a'] iki kez tekrar ettiği için 2(b']a') şeklinde sadeleştirilir.

Sonuç Kısmı
 $\rightarrow \sim(2a]2a' \leftrightarrow 2b]2b)$



$$\sim \min (\max 2a']2a, 2b]2b, \max 2a]2a', 2b']2b')$$

$$\sim \min (2b]2a, 2a]2b')$$

$$\sim (2b]2b') = (2b']2b)$$

Cıkarımın Sonucu

$$2(b']a') \rightarrow 2b']2b)$$

$$2(b]a) \rightarrow 2b']2b)$$



max max

$$= a]a]b]a = 2a]b]a$$

Sadeleştirme

Sonuç Kısmı

•Sonuç önermesi değıllidir; parantez içi eklemi ise “ $\leftrightarrow$ ”dır. 5. eşdeğerlik gereğı, parantez içinde olan ve okla ilişkisi gösterilen birimlerden, önce ilki değıllendir ve bunlardan büyük olanı alınır; sonra ikincisi değıllendir ve bunlardan büyük olanı alınır. Elde edilen birimlerden de küçük olanı alınır.
 •Parantez içerisindeki ifade değıllendir.

Cıkarımın Sonucu

•Öncüller kısmı ile sonuç önermesi arasındaki eklem “ $\rightarrow$ ”dır. 4. eşdeğerlik gereğı, öncüller kısmı değıllendir, ok ile ilişkisi gösterilen birimlerden büyük olanı alınır. Sonuç ifadesinde a]a] yerine 2a] yazılarak sadeleştirme yapılır.

Örnek 3: 6 önermeli bir konuşma evreninde 3. ve 4. önermelerin “ $\leftrightarrow$ ” eklemiyle birleşiminin sonucu şu şekilde olacaktır:

$$2^{x-1} = \alpha, 2^{n-x}/2 = \beta, \alpha(\beta a] \beta a') \text{ formülleri uyarınca}$$

3. önermenin doğruluk değerleri:

$$n=6 \text{ ve } x=3 \text{ gereğı}$$

$$2^{3-1} = \alpha = 4, 2^{6-3}/2 = \beta = 4 \text{ olması nedeniyle}$$

$$4(4a]4a') \text{’dir}$$

4. önermenin doğruluk değerleri:

$$n=6 \text{ ve } x=4 \text{ gereğı}$$

$$2^{4-1} = \alpha = 8, 2^{6-4}/2 = \beta = 2 \text{ olması nedeniyle}$$

$$8(2a]2a') \text{’dir}$$

3. önermenin “x”, 4. önermenin “y” ile gösterilmesi durumunda $(x \leftrightarrow y) = 4(4a]4a') \leftrightarrow 8(2a]2a')$ olmaktadır.

Burada ilk olarak her iki ifade 4'e bölünerek **daraltma** işlemi uygulanabilir. Buna göre ifade

$$(4a]4a') \leftrightarrow 2(2a]2a') \text{ olacaktır.}$$

Açma işlemi uygulandığında ise ifade $2a]2a]2a']2a' \leftrightarrow 2a]2a']2a]2a'$ şeklini alacaktır.

Bu işlem formülüyle denetlenirse:

$$\min, \max (2a']2a']2a]2a, 2a]2a']2a]2a'), \max (2a]2a]2a']2a', 2a']2a]2a']2a)$$

$$= \min, (2a]2a']2a]2a, 2a]2a]2a']2a)$$

$$= (2a]2a']2a']2a)$$

ifade 4 ile genişletilince son halini alır:

$$= 4(2a]2a']2a']2a)$$

Aslında göstermeye çalıştığımız işlem için “ $\leftrightarrow$ ” formülünü kullanmadan da denetleme yapmak mümkündür. ($x \leftrightarrow y$), daraltılmış haliyle $(4a]4a')$ ile $2(2a]2a')$ 'nin özdeş olup olmadığını denetlemeyi gerektirmektedir. Bu, herhangi bir satırda iki önermenin aynı doğruluk değerini almaları durumunda “D”, farklı doğruluk değeri almaları durumunda “Y” değerinin ortaya çıkacağı anlamına gelir. temel doğruluk sıralamalarının kendileriyle özdeşliği (a,a, a',a', b,b ve b',b') her durumda 2a sonucunu (totoloji) verir. Bir temel doğruluk sıralamasının çelişliğiyle (a,a', b,b') özdeşliği her durumda 2a' sonucunu (çelişki) verir. Bunların dışında kalan mümkün ilişki biçimleri ise özdeşlik gereği şu sonuçları verirler:

$$a,b = b,a = b$$

$$a'b = b,a' = b'$$

$$a,b' = b'a = b'$$

$$a',b' = b'a' = b$$

Bu sonuçlar üzerinden yaptığımız şu tespit, işlemlerde özdeşlik için formül kullanmamızı gerektirmeyecek bir akıl yürütme yapma imkânı sağlayacaktır:

Bir doğruluk sıralamasının kendisinden farklı bir sıralamayla özdeşliği denetleniyorsa (a ile b'nin özdeşliği), her ikisinin yalın ya da her ikisinin değilli olması durumunda sonuç “b” diğer iki durumda sonuç “b” olacaktır.

Bu tespitimize göre son bir değerlendirme yapalım:

(4a]4a') ile 2(2a]2a') ifadesinde dikkat edilirse 4a, (2a]2a') ile 4a' de (2a]2a') ile muhataptır. 4a, (2a]2a')'nın ilk kısmıyla totoloji, ikinci kısmıyla çelişki oluşturur. Yani sonuç ikinci ifadenin kendisidir. 4a', (2a]2a')'nın ilk kısmıyla çelişki ikinci kısmıyla totoloji oluşturur ki bu da sonucu ikinci ifadenin değil yapar. O halde sonuç bu akıl yürütmenin sonucu 2a]2a']2a']2a olacaktır. Bu ifade daha önce 4 ile daraltıldığı için asıl sonuç, yukarıda da formüller yardımıyla belirlediğimiz gibi **4(2a]2a']2a']2a)** olacaktır.

Bu işlemlerin tablo halindeki gösterimi ise şu şekilde olmak durumundadır¹⁵:

1.S			2.S			3.S			4.S		
x	↔	y	x	↔	y	x	↔	y	x	↔	y
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y
Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y
Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y
Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y

tablo18

¹⁵ 64 satırlık bir işlemi tek bir sayfada göstermek zor olacağından burada 16 satırlı (her biri üç sütundan oluşan) 4 ana sütunlu bir tablo kullanılacaktır.

Sonuç

Bu çalışmada, bir giriş olarak önceki bir çalışmamızda tanımladığımız doğruluk tablolarına ilişkin yeni yazım biçimi, herhangi bir önermenin doğruluk tablosunun diğer önermelerden bağımsız bir şekilde belirlenmesine imkân sağlayan bir formül ile bir konuşma evrenine ait mümkün ilişki biçimlerinin sayısını veren formül hatırlatılmıştır. Sonrasında, temel doğruluk sıralamaları kullanılarak ilk formül revize edilmiştir. **Jan Lukasiewicz'in çok değerli mantık için kullanmış olduğu aritmetik işlemler iki değerliliğe indirgenmiş**, elde edilen formüllerin, bileşik önermelerin doğruluk değerlerinin tespitinde nasıl kullanılacağı açıklanmaya çalışılmıştır. Bu uygulamada kolaylık sağlayacağını düşündüğümüz benzetim işlemleri örnek çözümlemelerin daha iyi anlaşılabilmesi için açık bir şekilde gösterilmiştir. Pratikte bu işlemler akıl yürütme becerisiyle doğru orantılı olarak zımni bir şekilde de yapılabilir, böylece çözümlemeler çok daha hızlı sonuçlandırılabilirler.

Kaynakça

- Bole, Leonard., Borowik, Piotr. *Many-Valued Logics 1 Theoretical Foundations*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1992.
- Malinowski, Grzegorz. “Many-valued Logic and Its Philosophy”, *Handbook of The History of Logic vol. 8* içinde, 13-94. Ed. Dov M. Gabbay, John Woods. Amsterdam, Oxford: Elsevier, North-Holland, 2007.
- Ural, Şafak. “Çok Değerli Mantık”, *Felsefe Arkivi*, sayı 26 (1987): 301-316.
- Yüksel, Yücel. “Doğruluk Tablolarına İlişkin Bazı Tespitler”, *Prof. Dr. Şafak Ural’a Armağan* içinde, 481-500. Editör Yücel Yüksel. İstanbul: Alfa Yayınları, 2012.