ISSN 1019-1011

Ç.Ü.MÜH.MİM.FAK.DERGİSİ		Haziran/Aralık	2006	Ç.Ü.J.FAC.ENG.ARCH.	
CİLT.21	*SAYI.1-2*	*June/December*		*VOL.21*	*NO.1-2*

KONVEKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMLERİNİN SONLU HACİM YÖNTEMİ İLE ANALİZİ*

Eyup Gökmen FİLİNTE ve Mustafa MAMAK
Ç.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana/Türkiye

ÖZET : *Günlük hayatımızda akışkanların incelenmesi, akışkanlara bağlı uygulamaların gelişimi açısından önem kazanmıştır. Akışkan hareketinin önemli bir rol oynadığı problemlerde, konveksiyon etkisi dikkate alınmalıdır. Doğada konveksiyonun yanında daima difüzyon olayı gerçekleşir; bu nedenle konveksiyon ve difüzyonu beraber ele alan hesap yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yöntemlerden biri sonlu hacim yöntemidir.*

Bu tez çalışmasında; bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemlerinin sonlu hacim yöntemi merkezi fark yaklaşımı, menba fark yaklaşımı, hybrid fark yaklaşımı ve kuvvet kuralı yaklaşımına göre farklı değişkenler kullanılarak analizi yapılmıştır. Problemin çözümü için MATLAB programında sonlu hacim yönteminin esaslarına dayanan kodlar oluşturulmuş, farklı durumlar için çıkan sonuçlar program aracılığıyla elde edilmiş ve sonuçlar her durum için irdelenmiştir.

ANALYSIS OF CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS WITH FINITE VOLUME METHOD

ABSTRACT : *In our daily life, examination of fluids and the improvement of applications dependent on fluids have earned importance. One of the important things in problems of fluid movement, convection effect is taken into consideration. In the nature, event of diffusion is come true together with convection. For this reason new calculation methods that dealing with convection and diffusion together are needed. One of the calculation methods is finite volume method.*

In this thesis study, analysis of one dimensional convection-diffusion problems have been maken with central differencing scheme, upwind differencing scheme, hybrid differencing scheme and power law scheme which are elements of finite volume method using different variables. To obtain the solutions of problems, algorithms bases on finite volume method principles was formed at MATLAB computer program and the results of problems were found and examined for different cases.

* Yüksek Lisans Tezi – MSc. Thesis

1. GİRİŞ

Akışkan hareketinin incelenmesi için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Akışkanların incelenmesi için kullanılan hesap yöntemleri hesaplamalı akışkanlar dinamiği (HAD) içerisinde gruplandırılabilir. Hesaplamalı akışkanlar dinamiği veya HAD; akışkan hareketi, ısı transferi, ve bunlarla ilişkili çeşitli problemleri (örn. kimyasal tepkimeler) içeren sistemlerin bilgisayarda modellenerek analiz edilmesidir. Endüstriyel ve endüstriyel olmayan uygulama alanlarında çok geniş ve güçlü bir kullanım alanına sahip bir tekniktir. Uygulama alanlarına ait örnekler aşağıdaki gibidir:

- Uçak ve araçların aerodinamiğinde
- Gemilerin hidrodinamiğinde
- Gaz türbinleri ve motorların bulunduğu termik santrallerde
- Elektrik ve elektronik mühendisliği alanlarında
- Kimya mühendisliği alanlarında
- Kıyı mühendisliğinde
- Çevre mühendisliğinde
- Meteroloji

Akışkan problemlerini çözebilmek için sayısal algoritmalar kullanılarak HAD kodları yaratılmıştır. Bu kodlar üç temel aşamayı kapsar. Bu aşamalar ön işlem, çözüm ve son işlemdir.

Ön işlem: Bu aşamada akışkan probleminin çözümü için HAD programlarına kullanıcı tarafından verilen girdileri kapsamaktadır. Bunlar;

- Çözüm bölgesi geometrisinin tanımı
- Çözüm bölgesinin alt elemanlara ayrılması ve ızgara oluşumu
- Fiziksel modelin seçimi
- Akım özelliklerinin tanımlanması
- Elemanlar üzerindeki sınır şartlarının belirlenmesi

Çözüm: Bu aşamada üç ayrı çözüm tekniği vardır. Bu teknikler; sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve sınır eleman yöntemidir. Sonlu hacimler yöntemi sonlu farklar yöntemindeki formülasyonların özel olarak geliştirilmesi ile bulunmuştur. Nümerik metodların çözüm aşamasını oluşturan temel adımlar;

- Bilinmeyen akım değerlerinin basit fonksiyonlar cinsinden tanımlanması
- Akımı idare eden denkleme yapılan yaklaşımların uygulanması ile ayrıklaştırma ve matematiksel işlemler
- Cebrik denklem takımlarının çözümü

Son işlem: Çözümde elde edilen sonuçların çeşitli şekillerde gösterimidir.

- bölge geometrisi ve grid gösterimi
- Vektörel çizim
- 2 veya 3 boyutlu çizimler
- Parçacık takibi
- Renkli çıktılar

Akışkan hareketinin önemli bir rol oynadığı problemlerde, konveksiyon etkisi dikkate alınmalıdır. Doğada konveksiyonun yanında daima difüzyon olayı gerçekleşir; bu nedenle konveksiyon ve difüzyonu beraber ele alan yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada, konveksiyon-difüzyon problemlerindeki genel bir ϕ özelliğinin değişimi sonlu hacim yöntemi ile incelenmiş; merkezi fark yaklaşımı, menba fark yaklaşımı, hybrid fark yaklaşımı ve kuvvet kuralı ile çeşitli akışkan problemlerinin çözümüne yönelik çalışmalar yapılmıştır.

2. SONLU HACİM YÖNTEMİ

Düzenli konveksiyon-difüzyon denklemi, genel bir ϕ özelliği için hareket denkleminden türetilebilir. Genel hareket denkleminin ϕ özelliğine bağlı diferansiyel ve integral formu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\phi u) = \mathrm{div}(\Gamma \mathrm{grad}\phi) + S_\phi \tag{1}$$

(1) denklemindeki ifadeler,

Akışkan elemanın Ø özelliğindeki artış	+	Akışkan elemanından çıkan net Ø miktarı	=	Ø özelliğinin difüzyona bağlı artış oranı	+	Ø'nin kütlesel kuvvetlere bağlı artış oranı

şeklindedir. Hareket denkleminde, denklemin sol tarafındaki değişim oranı ifadesi ve konvektif ifade ile denklemin sağ tarafındaki difüzyon ifadesi ve akım kaynağı ifadesidir.

Düzenli akım için (1) denklemindeki zamana bağlı ifade sıfır olmaktadır. Buna göre (1) denklemi yeniden düzenlenirse:

$$\mathrm{div}(\rho \underline{u}\phi) = \mathrm{div}(\Gamma \mathrm{grad}\phi) + S_\phi \tag{2}$$

(2) ifadesi bir kontrol hacmi (KH) üzerinde integre edilirse,

$$\int_{K.H} \mathrm{div}(\rho\phi u) = \int_{K.H} \mathrm{div}(\Gamma \mathrm{grad}\phi) dV + \int_{K.H} S_\phi dV \tag{3}$$

(3) denkleminde bir $\underline{a}$ vektörüne Gauss diverjans teoremi uygulanabilir.

$$\int_{K.H} \mathrm{div}\underline{a} dV = \int_A \underline{n}\underline{a} dA \tag{4}$$

$$\int_A \underline{n}\cdot(\rho\phi\underline{u}) dA = \int_A \underline{n}\cdot(\Gamma \mathrm{grad}\phi) dA + \int_{KH} S_\phi dV \tag{5}$$

Bu ifade kontrol hacmindeki akış dengesini göstermektedir. Eşitliğin sol tarafı, net konveksiyona bağlı akışı; sağ tarafı ise net difüzyon akışı ve kontrol hacmindeki ϕ özelliğinin değişimini vermektedir.

Konveksiyon-difüzyon denkleminin sonlu sayıdaki kontrol hacimleri üzerinde integre edilmesi ile bir cebrik denklem takımı oluşur (1). Genellikle iteratif sayısal teknikler, büyük denklem takımlarının çözümünde kullanılmaktadır. Bu yöntemler, ϕ parametresinin tahmin edilen ilk dağılımına göre çözüme başlar ve yakınsayan bir sonuca ulaşana kadar hesaplamaya devam eder (2,3).

Scarborough (4), yakınsayan bir iteratif yöntem için yeterli şartın, ayrıklaştırılmış denklemin katsayıları cinsinden ifade edilebileceğini göstermiştir:

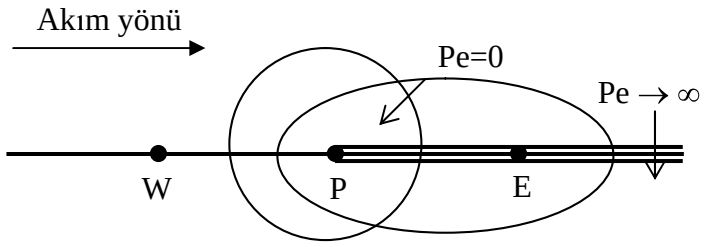
$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a'_P|} \quad \begin{array}{l} \leq 1 \text{ bütün düğüm noktalarında} \\ < 1 \text{ en az bir düğüm noktasında} \end{array}$$

burada a'_P, merkezi düğüm noktası P nin net katsayısıdır ve paydaki ifade diğer komşu noktalardaki katsayıların toplamıdır.

Roache (5), akışkanın hareket özelliğini, Şekil 1'de görüldüğü gibi, bir P noktasında sabit bir ϕ kuvvetini dikkate alarak göstermeye çalışmıştır. Konveksiyon ve difüzyon ifadelerinin birbirine göre relatif ölçüsü olmak üzere boyutsuz Peclet sayısı tanımlanmıştır:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x}$$

burada δx, karakteristik uzunluktur. Aşağıdaki şekilde farklı Peclet sayıları (Pe) için ϕ sabitine bağlı genel konturlar görülmektedir.



Şekil 1. Farklı Peclet sayılarındaki ϕ değerlerinin dağılımı

Akım alanının bilindiği kabul edilerek, konveksiyon-difüzyon problemleri incelenecektir. Burada en önemli nokta, denklemdeki konveksiyon ifadesinin katkısı dikkate alınırken, kontrol hacminin yüzeylerinde oluşan ϕ özelliği için uygun formülasyonlar türetilmesidir.

Merkezi fark yaklaşımı, menba fark yaklaşımı, hybrid fark yaklaşımı ve kuvvet kuralı gibi sonlu hacim yöntemleri, konveksiyon ve difüzyon ifadelerinin anlık etkisini tanımlamakta, yani düzenli bir akım ele alınmaktadır.

Sonlu hacim yöntemi ile dört farklı yaklaşımın ana prensiblerine göre sahip oldukları formülasyonlar kullanılarak MATLAB 6.5 versiyonunda algoritmalar oluşturulmuştur. Bu algoritmalar sonucunda her yaklaşım için istenilen değişkenlere göre sonlu hacim yöntemi sonuçları ile analitik yöntem sonuçları arasında karşılaştırmalar yapılmıştır.

3. SONLU HACİM YAKLAŞIMLARI

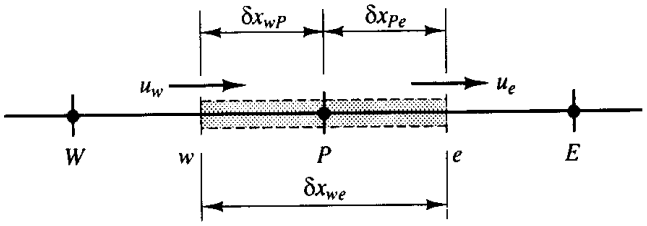
Kütlesel kuvvetlerin yokluğunda, bir boyutlu akım alanında ϕ özelliği konveksiyon ve difüzyon olayını idare eden denklem aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dx}(\rho u\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \tag{6}$$

Akım aynı zamanda süreklilik prensibini sağlamalıdır.

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \tag{7}$$

Bir boyutlu genel bir P noktasındaki kontrol hacmi Şekil 2'de görülmektedir. P noktasına komşu noktalar W ve E ile, kontrol hacmi yüzeyleri w ve e olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2. P noktası etrafındaki kontrol hacmi

Hareket denklemi kontrol hacmi üzerinde integre edilirse;

$$(\rho uA\phi)_e - (\rho uA\phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \tag{8}$$

Süreklilik denkleminin kontrol hacmi üzerinde integrasyonu sonucu aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(\rho uA)_e - (\rho uA)_w = 0 \tag{9}$$

Konveksiyon-difüzyon probleminde ayrıklaştırılmış denklemleri elde etmek üzere (8) denklemindeki ifadelerin belirlenmesi gerekmektedir.
F ve D gibi iki değişken aşağıdaki şekilde tanımlanırsa:

$$F = \rho u \quad \text{ve} \qquad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \tag{10}$$

Kontrol hacminin yüzeyindeki F ve D değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_w = (\rho u)_w \qquad , \qquad F_e = (\rho u)_e \tag{11a}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \qquad , \qquad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \tag{11b}$$

$A_w = A_e = A$ kabulü ve merkezi fark yaklaşımı ile (8) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \tag{12}$$

İntegre edilmiş süreklilik denklemi

$$F_e - F_w = 0 \tag{13}$$

F_e ve F_w değerlerini dikkate alırken akım alanındaki hızın bilindiği varsayılmaktadır. (12) denkleminin çözümü için *e* ve *w* yüzeylerindeki ϕ değerlerinin hesaplanması gerekir. Bu amaca yönelik çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Sonraki bölümlerde bu yöntemlerden merkezi fark yaklaşımı, menba fark yaklaşımı, hybrid fark yaklaşımı ve kuvvet kuralı yaklaşımı incelenecektir.

3.1. Merkezi Fark Yaklaşımı

Düzenli bir alan için ϕ değerleri merkezi fark yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \tag{14a}$$

$$\phi_w = \frac{(\phi_P + \phi_W)}{2} \tag{14b}$$

(14) ifadesi (8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{15}$$

(15) ifadesi düğüm noktalarındaki ϕ değerleri ile yeniden düzenlenirse,

$$\left[\left(D_w-\frac{F_w}{2}\right)+\left(D_e+\frac{F_e}{2}\right)\right]\phi_P=\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right)\phi_W+\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

$$\left[\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right)+\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right)+\left(F_e-F_w\right)\right]\phi_P=\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right)\phi_W+\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right)\phi_E \qquad (16)$$

ϕ_W ve ϕ_E değişkenlerinin katsayılarını a_W ve a_E olarak tanımlanırsa ayrıklaştırılmış konveksiyon-difüzyon denklemi için merkezi fark katsayıları aşağıdaki gibi olur.

$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E \qquad (17)$$

Merkezi fark yaklaşımına göre oluşan katsayılar Tablo 1'de verilmiştir.

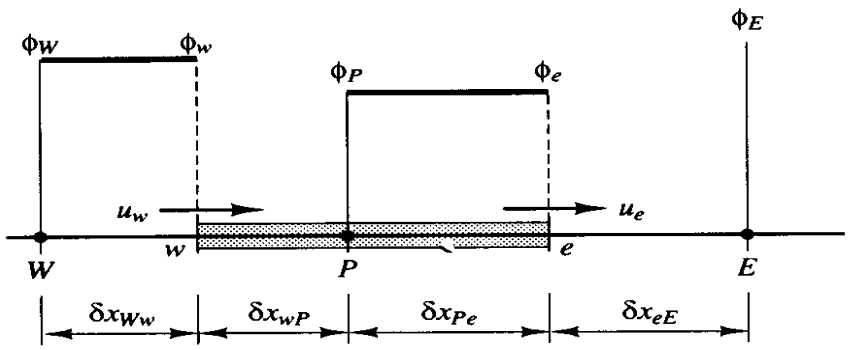
Tablo 1. Merkezi fark yaklaşımı katsayıları

a_W	a_E	a_P
$D_w+\frac{F_w}{2}$	$D_e-\frac{F_e}{2}$	$a_W+a_E+\left(F_e-F_w\right)$

Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemlerini çözebilmek için tüm noktalarda (17) denkleminin formunda ayrıklaştırılmış denklemler yazılabilir. Oluşacak cebrik denklemlerin çözümü ile ϕ özelliğinin dağılımı bulunabilir.

3.2. Menba Fark Yaklaşımı

Bu yaklaşımla eleman üzerindeki ϕ değeri kendinden bir önceki düğüm noktasındaki değere eşit olmaktadır.



Şekil 2. Hız pozitif iken menba fark yaklaşımı

Akım yönü pozitif yönde olduğunda, $u_w > 0$, $u_e > 0$ ($F_w > 0$, $F_e > 0$), bunlara bağlı olarak;

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{ve} \quad \phi_e = \phi_P \tag{18}$$

(18) denklemindeki ifade (12) denkleminde yerine yazılırsa,

$$F_e\phi_P - F_w\phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{19}$$

(19) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$(D_w + D_e + F_e)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E \tag{20}$$

elde edilir. (20) denklemi genel formda yazılabilir.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \tag{21}$$

Menba fark yaklaşımına göre oluşan katsayılar Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Menba fark yaklaşımı katsayıları

	a_W	a_E
$F_w > 0$, $F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e

3.3. Hybrid Fark Yaklaşımı

Spaldingin'in (6) geliştirdiği hybrid fark yaklaşımı merkezi ve menba fark yaklaşımlarının kombinasyonu esasına dayanmaktadır. Merkezi fark yaklaşımı küçük Peclet sayıları (Pe <2) için daha yakın çözümler sunarken büyük Peclet sayıları (Pe>2) için menba fark yaklaşımı çözüme yakınsamaktadır. Hybrid fark yaklaşımı her kontrol hacmi yüzeyinde net akımı hesaplayabilmek için yerel Peclet sayılarını temel alan parça formüller kullanır. Örnek olarak, herhangi bir kontrol hacminin batı yüzeyindeki Peclet sayısı,

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}} \tag{22}$$

eşitliği ile bulunabilir. Kontrol hacminin her bir birim alanına düşen net akım için hybrid fark denklemi aşağıdaki gibidir.

$$q_w = F_w\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{Pe_w}\right)\phi_W + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{Pe_w}\right)\phi_P\right] \qquad -2 < Pe_w < 2$$

$$q_w = F_w A_w \phi_W \qquad Pe_w \geq 2$$

$$q_w = F_w A_w \phi_P \qquad Pe_w \leq -2 \qquad (23)$$

Buradan da görüldüğü gibi konveksiyon ve difüzyon terimleri için düşük Peclet sayılarında merkezi fark yaklaşımı çözümü sağlamaktadır. Ama $|\mathrm{Pe}|>2$ durumunda menba fark yaklaşımı durumundaki değer difüzyonda sıfır olmaktadır. Genel ayrıklaştırılmış denklem formu;

$$a_P\ \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + \left(F_e - F_w\right) \qquad (24)$$

Hybrid fark yaklaşımı katsayıları Tablo 3'deki gibi yazılabilir.

Tablo 3. Hybrid fark yaklaşımı katsayıları genel formu

a_W	a_E
$\max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$

3.4. Kuvvet Kuralı Yaklaşımı

Bu yaklaşıma göre Peclet sayısı 10'u aşarsa difüzyon ifadesi sıfır alınmaktadır. 0 <Pe< 10 ise akışkan bir polinom ile ifade edilmektedir. Örnek olarak kontrol hacminin batı yüzeyi için

$$q_w = F_w\left[\phi_W - \beta_w\left(\phi_P - \phi_W\right)\right] \qquad -10 < Pe\ < 10 \qquad (25a)$$

$$\beta_w = \left(1-0.1Pe_w\right)^5 / Pe_w$$

$$q_w = F_w \phi_W \qquad Pe\ > 10 \qquad (25b)$$

yazılabilir. Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemi için kuvvet kuralının kullanılması ile elde edilen katsayılar aşağıda verilmiştir.

Tablo 4. Kuvvet kuralı yaklaşımı katsayıları genel formu

a_W	a_E
$D_w \max\left[0,\left(1-0.1\left\|Pe_w\right\|\right)^5\right]+\max\left[F_w,0\right]$	$D_e \max\left[0,\left(1-0.1\left\|Pe_e\right\|\right)^5\right]+\max\left[F_e,0\right]$

4. BULGULAR

Bu çalışmada değerlendirilen sonlu hacim yaklaşımları için ayrıklaştırılmış denklemlerdeki konveksiyona bağlı F ve difüzyona bağlı D katsayılarının kombinasyonlarının etkileri gözlenebilmiştir. Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemlerinde merkezi fark, menba fark ve hybrid fark yaklaşımları ile kuvvet kuralı yaklaşımına göre iç düğüm noktaları için genel ayrıklaştırılmış denklem formu aşağıdaki gibi olduğu görülmüştür.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \tag{26}$$

$$a_P = a_W + a_E + \left(F_e - F_w\right) \tag{27}$$

Herbir yaklaşıma ait katsayılar tablosu aşağıda verilmiştir.

Tablo 5. Sonlu hacim yaklaşımları genel katsayılar tablosu

Yaklaşım	a_W	a_E
Merkezi fark	$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$
Menba fark	$D_w + \max\left(F_w,0\right)$	$D_e + \max\left(0,-F_e\right)$
Hybrid fark	$\max\left[F_w,\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right),0\right]$	$\max\left[-F_e,\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right),0\right]$
Kuvvet kuralı	$D_w \max\left[0,\left(1-0.1\left\|Pe_w\right\|\right)^5\right] + \max\left[F_w,0\right]$	$D_e \max\left[0,\left(1-0.1\left\|Pe_e\right\|\right)^5\right] + \max\left[F_e,0\right]$

Merkezi fark yaklaşımı metodu hareketli olma özelliğinin eksik olmasından dolayı Peclet sayısının büyük olduğu durumlarda gerçek sonuçlar vermemektedir. Fakat hızın 0.1 m/s olduğu durum 1, durum 3 ve durum 5 durumlarında analitik yöntem sonucuna daha yakın sonuçlar vermektedir. Peclet sayısının daha da küçüldüğü daha küçük kontrol hacmi aralıklarında sonuç analitik sonuca daha da yakınlaşmaktadır.

Menba fark yaklaşımı, hybrid fark yaklaşımı ve kuvvet kuralı yaklaşımı akışkanın konservatif olma, hareketli olma ve sınırlı olması özelliklerine de sahip olduğu için daha uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Tablo 6'da ortalama hata yüzdelerine göre

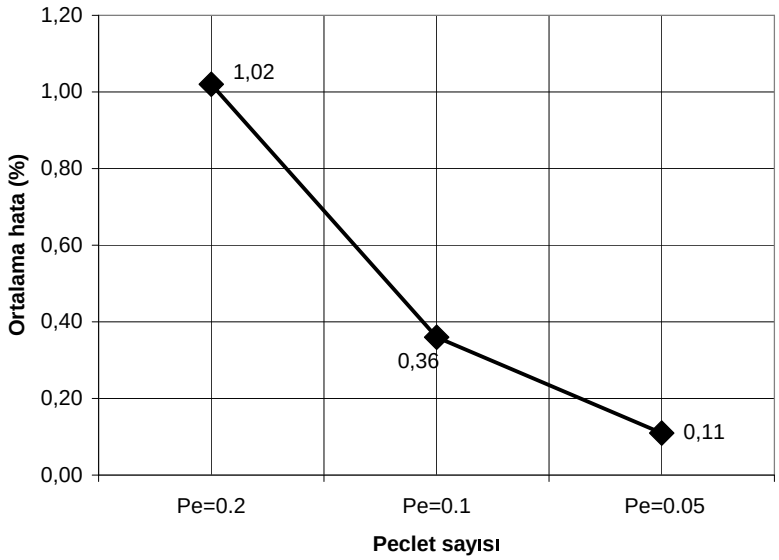
verilmiş analiz sonuçları içerisinde kuvvet kuralı yaklaşımının analitik sonuçlara en yakın değerleri verdiği belirlenmiştir. Hızın 2.5 m/s olması durumunda merkezi fark yaklaşımı dışında kalan yaklaşımlarda özellikle Peclet sayısının küçültülmesi ile sonuçların analitik sonuca yakınsadığı gözlenmiştir.

Akışkanın konservatiflik, sınırlılık ve hareketlilik özelliklerine sahip olması gerçekçi sonuçlar ve uyumlu iteratif sonuçlar vermektedir. Tablo 6'da bu sonuçlar ortalama hata yüzdelerine göre verilmiştir.

Tablo 6. Elde edilen çözümlerin ortalama hata yüzdeleri

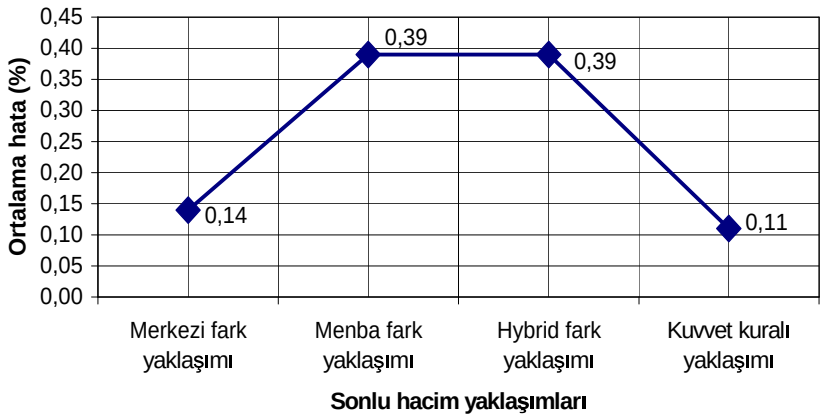
	Ortalama hata yüzdeleri					
Yaklaşım	Durum 1 Pe=0.2	Durum 2 Pe=5	Durum 3 Pe=0.1	Durum 4 Pe=2.5	Durum 5 Pe=0.05	Durum 6 Pe=1.25
Merkezi fark yaklaşımı	1.62	55.12	0.50	7.62	0.14	2.30
Menba fark yaklaşımı	1.05	5.57	0.67	3.76	0.39	2.38
Hybrid fark yaklaşımı	1.62	4.45	0.50	2.47	0.39	2.30
Kuvvet kuralı yaklaşımı	1.02	4.45	0.36	2.38	0.11	1.08

Şekil 3'de, hızın 0.1 m/s olduğu durumda kuvvet kuralı yaklaşımı için sonlu hacim aralığının değiştirilmesi ile bulunan Peclet sayılarına göre sonuçlar grafik olarak gösterilmiştir. Buna göre Peclet sayısının 0.05 olduğu durumda ortalama hata yüzdesi en küçük bulunmuştur.



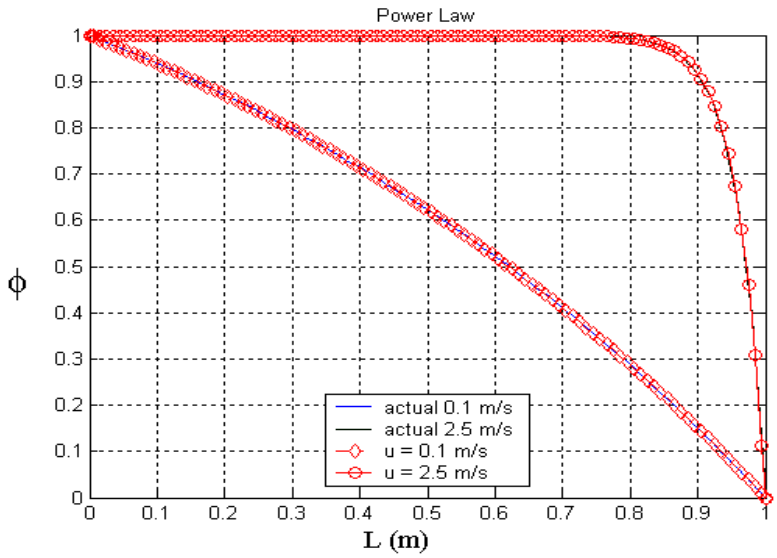
Şekil 3. Kuvvet kuralı yaklaşımında Peclet sayısına göre ortalama hata yüzdeleri

Tablo'6 da ortalama hata yüzdelerine göre verilmiş analiz sonuçları içerisinde kuvvet kuralı yaklaşımının analitik sonuçlara en yakın değerleri verdiği belirlenmiştir. Şekil 4'de en küçük Peclet sayısı değerinin bulunduğu durum 5 için sonlu hacim yaklaşımlarında çıkan ortalama hata yüzdesi değerlerinin grafiği gösterilmiştir. Buna göre kuvvet kuralı yaklaşımı en düşük değere sahiptir.



Şekil 4. Pe =0.05 için sonlu hacim yaklaşımları ortalama hata yüzdeleri

Hızın 2.5 m/s olduğu durum için akışkanın karakteristik özelliğinden dolayı analitik çözümde elde edilen ϕ değerleri seçtiğimiz sınırların sonlarına doğru hızlı değişimler göstermektedir. Sonlu hacim yönteminde bu değişimin çözümde oluşturduğu hata yüzdesini en aza indirgeyebilmek için daha küçük kontrol hacmi aralığı seçilmelidir. Hızın 0.1 m/s ve 2.5 m/s olduğu durumlarda, 100 eşit kontrol hacmi aralığı için kuvvet kuralı yaklaşımı ile elde edilen grafik Şekil 5'de görülebilir. Şekilden de görüldüğü gibi kuvvet kuralı yaklaşımı, sonlu hacim aralığının 0.01 m seçilmesi ile analitik sonuçlara en yakın değerleri vermiştir.



Şekil 5. 100 eşit kontrol hacmi aralığı için kuvvet kuralı yaklaşımı sonuçları

5. SONUÇLAR

Günümüzde hızlı bir şekilde gelişmekte olan bilgisayar teknolojisi, uzun süreli çalışmalar gerektiren hesaplamalı akışkanlar dinamiği çözümlerini kısa süre içerisinde gerçekleştirebilme olanağı sunmuştur. Gelişen bilgisayar teknolojisinin sunduğu bu imkanlar, hesaplamalı akışkanlar dinamiğinin uygulama alanlarında da hızlı bir gelişime imkan tanımıştır. Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinin yöntemlerinden biri olan sonlu hacimler yöntemi de bu gelişimden faydalanan bir yöntem olmuştur.

Bu çalışmanın konusu, bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemlerinin analizinin sonlu hacim yöntemlerinden olan merkezi fark yaklaşımı, menba fark yaklaşımı, hybrid fark yaklaşımı ve kuvvet kuralı yaklaşımına göre yapılmasıdır. Problemler hızın ve sonlu hacim aralığının değiştirilmesi ile oluşturulan altı farklı durum için çözülmüştür. Kuvvet kuralı yaklaşımı, çözümde kullanılan dört yaklaşım arasında altı durumda da en düşük ortalama hata yüzdesini vermiştir. Kuvvet kuralı yaklaşımı sonuçlarına göre özellikle Peclet sayısının küçük olduğu durumlarda analitik sonuçlara daha yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Sonlu hacim aralığının küçültüldüğü durumlarda yani Peclet sayısının daha küçük olduğu durumlarda sonlu hacim yöntemi sonuçları çözüme daha çok yakınsamaktadır. Akışkanın 0.1 m/s hızına sahip olduğu durumda kuvvet kuralı yaklaşımı için sonlu hacim aralığının değiştirilmesi ile Peclet sayısının 0.05 olduğu durumda ortalama hata yüzdesi en küçük bulunmuştur.

Sonlu hacim aralığının daha küçük seçilmesi matematiksel çözümlemesi yapılacak denklemlerin çözüm süresini uzatmaktadır. Fakat, gelişen bilgisayar teknolojisi, denklemlerin çözülmesinin daha kısa süre içerisinde gerçekleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Bilgisayar teknolojisinin hızla gelişmesi sayesinde HAD uygulamaları da bu gelişimden faydalanabilecektir.

6. KAYNAKLAR

1. *Versteeg,H.K. ve Malalasekera,W., "An introduction to computational fluid dynamics", Prentice Hall, Malaysia, 1995.*

2. *Hirsch,C., "Numerical computation of internal and external flows Vol. 2", John Wiley & Sons, p. 493, Chichester, England, 1990.*

3. *Zhu,J., "A low-diffusive and oscillation-free convective scheme", Commun. Appl. Numer. Methods, Vol. 7, p.225, 1991.*

4. Scarborough,J.B., "Numerical mathematical analysis 4th edn.", Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1958.

5. *Roache,P.J., "Computational fluid dynamics", Hermosa, Albuquerque, NM., 1976.*

6. *Spalding,D.B., "A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 4, p.551, 1972.*

This document was created with Win2PDF available at http://www.daneprairie.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.