

AKÜ FEMÜBİD 18(2018) 011302 (842-851)

AKU J. Sci. Eng.18 (2018) 011302 (842-851)

DOI: 10.5578/fmbd.67600

Araştırma Makalesi / Research Article

Conformable Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Nümerik Çözümleri

Orkun Taşbozan¹, Gizem Bayaslı²¹Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay.²Türkiye İş Kurumu, İşkur, Hatay.

e-posta: otasbozan@mku.edu.tr

Geliş Tarihi: 05.02.2018

; Kabul Tarihi: 26.10.2018

Anahtar kelimeler**Öz**

Homotopi Analiz Yöntemi; Conformable Kesirli Türev; Kesirli Wu-Zhang Sistemi; Kesirli Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi.

Bu makalede, kesirli Wu-Zhang sisteminin ve birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için Homotopi Analiz Yöntemi (HAM) uygulandı. Elde edilen sonuçlar, analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

Numerical Solutions of Conformable Partial Differential Equations By Homotopy Analysis Method

Keywords**Abstract**

Homotopy Analysis Method; Conformable Fractional Derivative; Fractional Wu-Zhang System; Fractional Combined KdV-mKdV Equation.

In this paper, the Homotopy Analysis Method (HAM) is applied to the fractional Wu-Zhang system and combined KdV-mKdV equation to obtain their numerical solutions. The results were compared with analytical solutions.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

1695 yılında G.W. Leibnitz, L' Hospital'a "Tamsayı mertebeli $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevi tamsayı mertebeli olmayan türev için genellenebilir mi?" şeklinde soru sormuştur. Böylece ilk defa kesirli türev kavramı ortaya çıkmıştır (Oldham *et al.* 1974). 17. yüzyıldan beri keyfi mertebeden diferansiyel ve integrasyon kavramı birçok matematikçinin çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır (Hilfer 2000). Uygulamalı matematiğin önemli bir alanı olan kesirli hesaplamalar bilim adamlarında büyük ilgi uyandırdı. Ünlü matematikçi olan Liouville, 1832-1837 yılları arasında bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır. Bir diğer ünlü matematikçi Riemann ise 1847 yılında bu kavram ile ilgili bir tanım vermiştir.

Riemann'ın verdiği bu tanım ile Liouville tarafından verilen tanım birleştirilerek, günümüzde de sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı tanımı ortaya çıkmıştır (Kilbas *et al.* 2006). Sonlu fark yaklaşımı yardımı ile tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımı Grünwald ve Letnikov tarafından 1967 yılında literatüre kazandırılmıştır. Daha sonraki yıllarda ise Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımının Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımına denk olduğu gösterilmiştir (Debnath *et al.* 2007). Kesirli mertebeden türev yaklaşımının bir diğer tanımı ise 1967 yılında M. Caputo tarafından verilmiştir (Podlubny 1999). R. Khalil ve arkadaşları ise conformable kesirli türev ve integral yaklaşımlarının tanımını 2014 yılında vermişlerdir.

Bu tanımın, yukarıda verilen türev yaklaşımlarına göre bazı avantajları bulunmaktadır (Khalil *et al.* 2014). Bu kesirli mertebeden türev yaklaşımı kullanılarak, birçok conformable kesirli türev içeren diferansiyel denklemler nümerik ve analitik olarak çözülmüştür (Khodadad *et al.* 2016, Çenesiz *et al.* 2016, Hosseini *et al.* 2017, Kurt *et al.* 2016, Yavuz 2017, Kumar *et al.* 2017, Hosseini *et al.* 2017, Kaplan *et al.* 2017, Kaplan 2017, Çenesiz *et al.* 2017, Iyiola *et al.* 2017, Eslami *et al.* 2017, Kurt *et al.* 2017).

Fen ve mühendislikte ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde etkili bir yöntem olan Homotopi Analiz yöntemi 1992 yılında S.J. Liao tarafından literatüre kazandırılmıştır. Homotopi Analiz yönteminde mevcut olan yardımcı parametreler sayesinde elde edilen seri çözümlerin yakınsaklık bölgesi kontrol edilebilmektedir (Liao 1992).

Bu çalışmada, Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak conformable zaman kesirli Wu-Zhang sistemi ve conformable zaman kesirli birleştirilmiş KdV-mKdV denklemleri nümerik olarak çözüldü. Elde edilen nümerik çözümler tam çözümler ile karşılaştırıldı.

2. Materyal ve Metot

2.1 Conformable türev ve integral yaklaşımı

Tanım 1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli türevi

$$T_{\alpha}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. (Khalil *et al.* 2014, Kurt *et al.* 2015).

Teorem 1. Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere α –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ise o zaman f fonksiyonu t_0 noktasında sürekli bir fonksiyondur (Khalil *et al.* 2014).

Teorem 2. $\alpha \in (0,1]$ ve $t > 0$ için f ve g fonksiyonları α –inci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Khalil *et al.* 2014).

a. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g),$$

b. Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$,

c. $f(t) = \lambda$ sabit fonksiyonu için $T_{\alpha}(\lambda) = 0$,

d. $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$,

e. $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$,

f. $T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$.

Tanım 2. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere α –inci mertebeden conformable kesirli integral

$$I_{\alpha}^a(f)(t) = I_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

genelleştirilmiş Riemann integrali ile tanımlanır (Khalil *et al.* 2014).

Teorem 3. f sürekli fonksiyonu için $t \geq a$ olmak üzere

$$T_{\alpha}(I_{\alpha}^a(f))(t) = f(t)$$

eşitliği sağlanır (Khalil *et al.* 2014).

2.2 Homotopi Analiz yöntemi (HAM)

Bu kısımda, Homotopi Analiz yönteminin bir lineer olmayan diferansiyel denkleme uygulanmasına yer verildi.

Lineer olmayan denklemlerin tam çözümünü bulmak bazı durumlarda imkansızdır. 1992 yılında, lineer ve lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunmasına yardımcı olan ve Homotopi kavramına dayanan Homotopi Analiz yöntemi Shijun Liao tarafından literatüre kazandırıldı. Doğada meydana gelen olayların matematiksel modellenmesiyle meydana gelen cebirsel denklemler, diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler gibi birçok lineer olmayan denklemlerin Homotopi Analiz yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir (Abbasbandy 2006, Zhang *et al.* 2011, Taşbozan *et al.* 2012, Esen *et al.* 2012, Esen *et al.* 2013, Abbasbandy *et al.* 2013).

Bu yöntemde kullanılan, yardımcı parametreler sayesinde elde edilen seri çözümlerinin yakınsaklık bölgesi kontrol edilebilir. Ayrıca, bir yardımcı lineer operatör yardımıyla problemin başlangıç yaklaşımından tam çözümüne götüren sürekli bir dönüşüm tanımlanır. Sonuç olarak, ele alınan lineer olmayan denklemler Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak sonsuz sayıda lineer probleme dönüşmüş olur (Liao 2003).

2.2.1. Sıfırıncı-derece deformasyon denklem

x konum, t zaman değişkenleri olmak üzere $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon ve $\mathcal{N}$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere

$$\mathcal{N}[u(x, t)] = 0$$

şeklindeki lineer olmayan genel bir diferansiyel denklemi ele alınsın. $u_0(x, t)$ bir başlangıç yaklaşımı, $\hbar$ sıfırdan farklı bir yardımcı parametre, $H(x, t)$ sıfırdan farklı bir yardımcı fonksiyon ve $\mathcal{L}$ ise

$$f(x, t) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f(x, t)] = 0$$

koşulunu sağlayan bir yardımcı lineer operatör olsun. Bu şartlar altında

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi(x, t; q); u_0(x, t), H(x, t), \hbar, q] = \\ (1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} - \\ q\hbar H(x, t)\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] \end{aligned}$$

homotopisi kurulabilir. Burada $q \in [0, 1]$ gömme parametresidir. Sıfırdan farklı olan $\hbar$ yardımcı parametresinin ve $H(x, t)$ fonksiyonunun Homotopi Analiz yönteminde önemli katkıları vardır. Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen seri çözümlerin yakınsaklığı için $\hbar$ yardımcı parametresi çok büyük öneme sahiptir. Ayrıca yöntemin en büyük avantajlarından birisi de, $u_0(x, t)$ başlangıç tahmininin, $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörünün, $\hbar$ yardımcı parametresinin ve $H(x, t)$ fonksiyonunun ele alınan lineer olmayan problemlere uygun olarak seçilebilmesidir (Liao 2003). Yukarıda kurulan homotopide

$\mathcal{H}[\Phi(x, t; q); u_0(x, t), H(x, t), \hbar, q] = 0$ seçilmesiyle, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$\begin{aligned} (1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} \\ = q\hbar H(x, t)\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $q = 0$ olarak alınırsa, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[\Phi(x, t; 0) - u_0(x, t)] = 0$$

şekline dönüşür. $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörünün özelliğinden

$$\Phi(x, t; 0) = u_0(x, t)$$

bulunur. Sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde $q = 1$ seçilir ve $\hbar \neq 0$, $H(x, t) \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\mathcal{N}[\Phi(x, t; 1)] = 0$$

olur. Böylece

$$\Phi(x, t; 1) = u(x, t)$$

bulunur. Sonuç olarak, elde edilen denklemlerden, q parametresi 0 dan 1 e artarken $\Phi(x, t; q)$

fonksiyonunun, $u_0(x, t)$ başlangıç koşulundan $u(x, t)$ tam çözümüne değiştiği görülür. Homotopi konusunda böyle bir değişime deformasyon adı verilir (Liao 2003).

$u_0^{[m]}(x, t)$ ile gösterilen

$$u_0^{[m]}(x, t) = \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

ifadesine m –inci derece deformasyon türevi adı verilir. Eğer $\Phi(x, t; q)$ fonksiyonu q gömme parametresine göre Taylor serisine açılırsa

$$\Phi(x, t; q) = \Phi(x, t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_0^{[m]}(x, t)}{m!} q^m$$

eşitliği bulunur. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = D_m(\Phi)$$

eşitliğinin kullanılması ile $\Phi(x, t; q)$ fonksiyonunun Taylor serisi

$$\Phi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) q^m$$

olarak yeniden yazılır. $D_m(\Phi)$ ifadesine, Φ fonksiyonunun m –inci dereceden homotopi türevi ve yukarıda elde edilen serisiye de homotopi serisi denir (Liao 2009).

Sonuç olarak, Homotopi Analiz yönteminin lineer olmayan bir probleme uygulanmasıyla elde edilecek seri çözüm

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t)$$

şeklinde bulunur (Liao 2003).

2.2.2. Yüksek-derece deformasyon denklem

$$\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$$

olarak tanımlansın. Sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde q gömme parametresine göre m kez türev alındıktan sonra, elde edilecek ifade $m!$ ile bölünür ve son olarak da gömme parametre değeri $q = 0$ olarak seçilirse m –inci derece deformasyon denkleminde

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1})$$

eşitliği bulunur. Burada $\mathcal{X}_m$ değeri

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

olarak ve $R_m(\vec{u}_{m-1})$ ifadeside

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}$$

şeklinde tanımlıdır

Yüksek-derece deformasyon denklemi, lineer olmayan bir $\mathcal{N}$ operatörünün $R_m(u_{m-1})$ teriminden ve $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatöründen meydana gelmektedir. Yüksek-derece deformasyon denkleminin sağ tarafı yalnızca $u_{m-1}(x, t)$ fonksiyonuna bağlıdır. Böylece $u_0(x, t)$ başlangıç koşulu kullanılarak, bu denklemin iteratif olarak çözülmesiyle

$u_1(x, t), u_2(x, t), \dots$ değerleri bulunabilir. Sonuç olarak, $u(x, t)$ fonksiyonunun m -inci yaklaşımı

$$\sum_{k=0}^m u_k(x, t) \quad (3.4.4)$$

serisi ile bulunur (Liao 2003).

3. Bulgular

3.1 Conformable Kesirli Wu-Zhang Sistemi

İlk örnek olarak, $0 < \alpha \leq 1$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= -v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{aligned}$$

conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sistemi

$$u(x, 0) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

$$v(x, 0) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]^2$$

başlangıç koşulları ile ele alınsın. Problemin tam çözümü

$$u_{tam}(x, t) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right),$$

$$v_{tam}(x, t) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right)$$

$$- \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right) \right]^2$$

şeklindedir (Eslami and Rezazadeh 2016).

Conformable kesirli Wu-Zhang sisteminin yaklaşık çözümlerini bulmak için c_1, c_2 integral sabitleri için $\mathcal{L}[c_1] = 0$ ve $\mathcal{L}[c_2] = 0$ şartları sağlanmak üzere lineer operatörler

$$\mathcal{L}[\phi_1(x, t; q)] = D_t^\alpha [\phi_1(x, t; q)],$$

$$\mathcal{L}[\phi_2(x, t; q)] = D_t^\alpha [\phi_2(x, t; q)]$$

olarak seçilsin. $\mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)]$ ve $\mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)]$ lineer olmayan

operatörleri ise conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminden

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= \frac{\partial^\alpha \phi_1(x, t; q)}{\partial t^\alpha} \\ &+ \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= \frac{\partial^\alpha \phi_2(x, t; q)}{\partial t^\alpha} \\ &+ \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t; q)}{\partial x^3} \\ &+ \phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Teorem 2.-(f) özelliğinin kullanılmasıyla, yukarıda elde edilen lineer olmayan operatörler

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial t} \\ &+ \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial t} \\ &+ \phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} + \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t; q)}{\partial x^3} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Sıfırıncı-derece deformasyon denklemleri $H_1(x, t) = 1$ ve $H_2(x, t) = 1$ seçilmesiyle

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi_1(x, t; q) - u_0(x, t)]$$

$$= q\hbar_1 \mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)],$$

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi_2(x, t; q) - v_0(x, t)]$$

$$= q\hbar_2 \mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)]$$

olarak yazılır. Yukarıda elde edilen sıfırıncı-derece deformasyon denklemlerinde $q = 0$ ve $q = 1$ değerlerinin seçimiyle

$$\phi_1(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0),$$

$$\phi_2(x, t; 0) = v_0(x, t) = v(x, 0),$$

$$\phi_1(x, t; 1) = u(x, t),$$

$$\phi_2(x, t; 1) = v(x, t)$$

eşitlikleri bulunur. Yukarıda elde edilen sıfırıncı-derece deformasyon denklemleri q gömme parametresine göre m defa türevi alındıktan sonra $m!$ ile bölünürse ve elde edilen denklemlerde $q =$

0 alınırsa, m –inci dereceden deformasyon denklemleri

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_m(x, t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t)] &= \hbar_1 R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}), \\ \mathcal{L}[v_m(x, t) - \mathcal{X}_m v_{m-1}(x, t)] &= \hbar_2 R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}) &= t^{1-\alpha} \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_{m-1}(x, t)}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}) &= t^{1-\alpha} \frac{\partial v_{m-1}(x, t)}{\partial t} \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} v_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial v_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

biçimindedir. $m \geq 1$ olmak üzere, yukarıda elde edilen m –inci dereceden deformasyon denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} u_m(x, t) &= \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t) + \hbar_1 \mathcal{L}^{-1}[R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})], \\ v_m(x, t) &= \mathcal{X}_m v_{m-1}(x, t) + \hbar_2 \mathcal{L}^{-1}[R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})] \end{aligned}$$

iterasyon formülleri bulunur. Kolaylık olması için $\hbar_1 = \hbar_2 = \hbar$ olarak alınırsa, $m \geq 1$ için başlangıç koşullarının yardımıyla iterasyon formüllerinden

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \\ u_1(x, t) &= \frac{\sqrt{3}\hbar t^\alpha}{\alpha(1 + \cosh(\sqrt{3}x))}, \end{aligned}$$

.

.

.

ve

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]^2, \\ v_1(x, t) &= -\frac{4\sqrt{3}\hbar t^\alpha \operatorname{csch}(\sqrt{3}x)^3 \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^4}{\alpha}, \end{aligned}$$

.

.

.

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak, Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak elde edilen seri çözümler

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots,$$

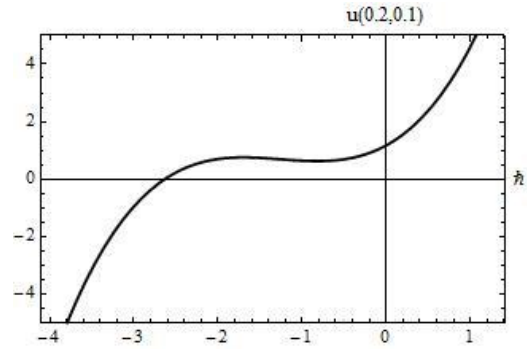
$$v(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + \dots$$

olarak yazılabilir. Mathematica yardımıyla, $u_0(x, t)$ ve $v_0(x, t)$ başlangıç değerleri kullanılarak iterasyon formüllerinin yardımı ile ilk üç terimlerin hesaplanmasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümleri

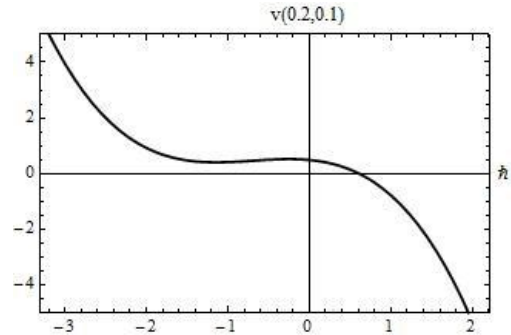
$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t),$$

$$v(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t)$$

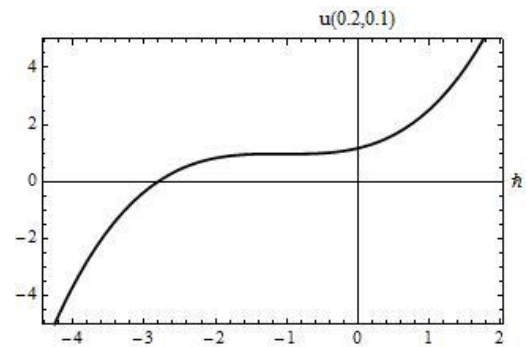
şeklinde belirlendi.



Şekil 1. $\alpha = 0.5, x = 0.2$ ve $t = 0.1$ değerlerindeki $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi

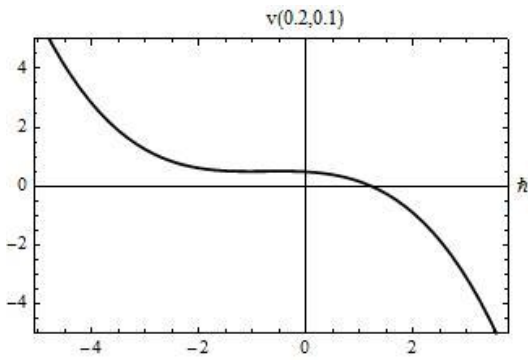


Şekil 2. $\alpha = 0.5, x = 0.2$ ve $t = 0.1$ değerlerindeki $v(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi

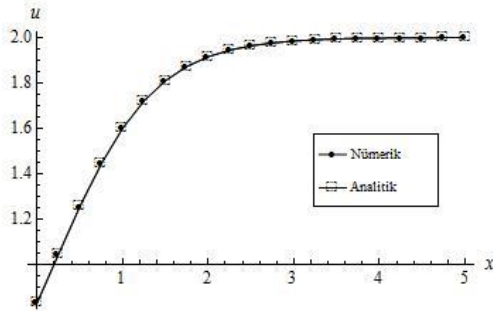


Şekil 3. $\alpha = 0.75, x = 0.2$ ve $t = 0.1$ değerlerindeki $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi

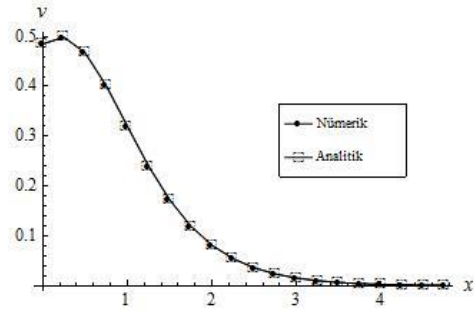
Conformable kesirli Wu-Zhang sisteminin, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin yakınsaklığını araştırmak için $x = 0.2, t = 0.1$ ve farklı α değerlerindeki $\hbar$ –eğrileri Şekil 1-4 de verildi. Tüm α değerlerindeki $\hbar$ –eğrileri incelendiğinde; $\hbar$ yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.5 \leq \hbar \leq -0.25$ aralığıdır. Bu aralık içerisinde seçilen $\hbar$ yardımcı parametresi için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin yakınsak olacağı görülür.



Şekil 4. $\alpha = 0.75, x = 0.2$ ve $t = 0.1$ değerlerindeki $v(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi



Şekil 5. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 6. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması

Şekil 5.-Şekil 6. da ele alınan problemin $t = 0.01$ zamanında, $0 \leq x \leq 5$ aralığında, $\alpha = 0.5$, değeri kullanılarak $\hbar = -1$ değeri için elde edilen $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ nümerik çözümleri ile $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin eğrileri verildi. Eğriler incelendiğinde, göz önüne alınan değerlerde yaklaşık çözüm eğrileri ile tam çözüm eğrilerinin uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 1. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

x	$u(x, t)$			$v(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	0.91358	0.913613	0.77×10^{-5}	0.49598	0.49627	2.912×10^{-4}
0.2	0.99992	1.000007	8.26×10^{-5}	0.49975	0.50000	2.517×10^{-4}
0.3	1.08627	1.086391	1.163×10^{-4}	0.49608	0.49627	1.846×10^{-4}
0.4	1.17135	1.171491	4.14×10^{-4}	0.48519	0.48530	1.030×10^{-4}
0.5	1.25396	1.254121	5.20×10^{-4}	0.46769	0.46771	2.094×10^{-5}
0.6	1.33304	1.333191	4.93×10^{-4}	0.44454	0.44449	4.973×10^{-5}
0.7	1.40770	1.407841	3.59×10^{-4}	0.41694	0.41684	1.016×10^{-4}
0.8	1.47729	1.477401	1.153×10^{-4}	0.38618	0.38604	1.322×10^{-4}
0.9	1.54137	1.541469	1.124×10^{-5}	0.35355	0.35341	1.431×10^{-4}
1.0	1.59972	1.599796	6.66×10^{-5}	0.32026	0.32013	1.386×10^{-4}

Conformable kesirli Wu-Zhang sisteminin, $t = 0.01, \hbar = -1$ ve farklı α değerlerindeki göz önüne alınan yöntem yardımı ile elde edilen $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve

mutlak hataları Çizelge 1.-Çizelge 2. de verildi. Çizelgeler incelendiğinde, ele alınan değerlerde yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yakın olduğu ve mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu görülür. Ayrıca α değeri arttıkça hataların azaldığı tablolardan açıkça görülmektedir.

Çizelge2. $t = 0.01$, $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

x	$u(x, t)$			$v(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	1.05005	1.05005	9.230×10^{-8}	0.49875	0.49875	5.612×10^{-7}
0.2	1.13585	1.13585	1.818×10^{-7}	0.49077	0.49077	4.628×10^{-7}
0.3	1.21965	1.21965	2.498×10^{-7}	0.47588	0.47588	3.168×10^{-7}
0.4	1.30034	1.30034	2.904×10^{-7}	0.45490	0.45490	1.509×10^{-7}
0.5	1.37695	1.37695	3.026×10^{-7}	0.42896	0.428956	7.414×10^{-9}
0.6	1.44872	1.44872	2.895×10^{-7}	0.39932	0.39932	1.370×10^{-7}
0.7	1.51514	1.51514	2.574×10^{-7}	0.36732	0.36732	2.264×10^{-7}
0.8	1.57590	1.57590	2.135×10^{-7}	0.33417	0.33417	2.737×10^{-7}
0.9	1.63090	1.63090	1.648×10^{-7}	0.30098	0.30098	2.842×10^{-7}
1.0	1.68021	1.68021	1.167×10^{-7}	0.26866	0.26866	2.670×10^{-7}

3.2 Conformable Kesirli Birleştirilmiş KdV-mKdV Denklemleri

İkinci örnek olarak ise $0 < \alpha \leq 1$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi

$$u(x, 0) = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \tanh(x)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alınsın. Ele alınan problemin tam çözümü

$$u_{tam}(x, t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \tanh\left(x - \frac{7t^\alpha}{4\alpha}\right)$$

olarak verilmiştir (Taşbozan et al. 2016).

Conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için c integral sabiti olmak üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ özelliğinin kullanılmasıyla

$$\mathcal{L}[\phi(x, t; q)] = D_t^\alpha [\phi(x, t; q)]$$

olacak şekilde lineer operatör belirlensin. Lineer olmayan $\mathcal{N}[\phi(x, t; q)]$ operatör

$$\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^3 \phi(x, t; q)}{\partial x^3} + \phi(x, t; q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} + (\phi(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - \frac{\partial^3 \phi(x, t; q)}{\partial x^3} + \phi(x, t; q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} + (\phi(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar \mathcal{N}[\phi(x, t; q)]$$

şeklinde sıfırıncı-derece deformasyon denklemi elde edilmiş olur. Elde edilen sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde $\phi(x, t; 0)$ ve $\phi(x, t; 1)$ değerleri

$$\phi(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0),$$

$$\phi(x, t; 1) = u(x, t)$$

şeklinde bulunur. Sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde gerekli işlemler yapılarak m -inci dereceden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1})$$

olarak elde edilir. Burada

$$\vec{u}_{m-1} = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, \vec{u}_{m-1}(x, t)\},$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = t^{1-\alpha} \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^3 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^3}$$

$$+ \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^n u_k(x, t) u_{n-k}(x, t) \right) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x}$$

$$+ \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x}$$

şeklinde dir. Böylece, m -inci dereceden deformasyon denkleminde

$$u_m(x, t) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})]$$

yazılabilir. $m \geq 1$ olmak üzere problemin başlangıç koşulunun kullanılmasıyla yukarıda elde edilen iterasyon formülünden

$$u_0(x, 0) = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \tanh(x),$$

$$u_1(x, t) = \frac{\sqrt{3} \hbar t^\alpha}{\alpha(1 + \cosh(\sqrt{3}x))},$$

·
·
·

değerleri elde edilir. Bu değerler yardımıyla

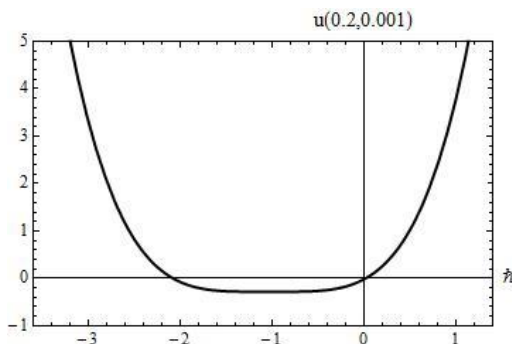
$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

şeklinde seri çözümü bulunmuş olur. Homotopi Analiz yöntemi yardımıyla elde edilen iterasyon formülünden ilk 4 terimin Mathematica yardımıyla hesaplanmasıyla

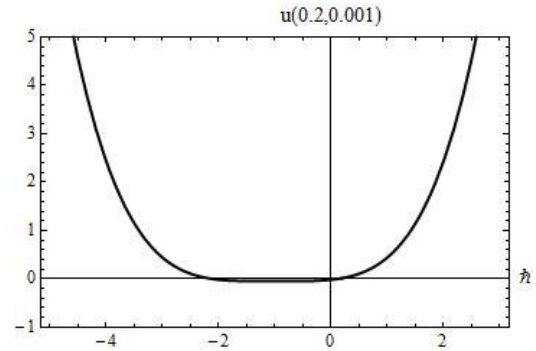
$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \dots + u_4(x, t)$$

Homotopi Analiz yaklaşık çözümü bulunur.

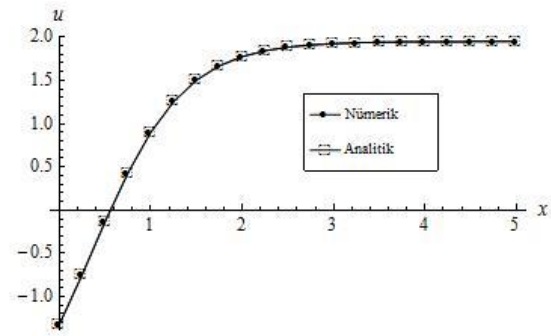
Şekil 7.-Şekil 8. de conformable kesirli birleştirilmiş KdV-mKdV probleminin, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u(x, t)$ çözümünün yakınsaklığını araştırmak için $x = 0.2, t = 0.001$ ve farklı α değerlerindeki $\hbar$ –eğrileri verildi. Farklı α değerleri için verilen $\hbar$ –eğrileri incelendiğinde, $\hbar$ yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.75 \leq \hbar \leq -0.25$ aralığıdır. $\hbar$ yardımcı parametresinin, $-1.75 \leq \hbar \leq -0.25$ aralığından seçilen herhangi bir değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün yakınsak olacağı görülür. $0 \leq x \leq 5$ aralığında, $\alpha = 0.5, \alpha = 0.9$ değerlerinin seçimiyle göz önüne alınan problemin $t = 0.01$ zamanında, $\hbar = -1$ değeri için elde edilen $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün eğrileri Şekil 9. ve Şekil 10. da verildi. Eğriler incelendiğinde, $t = 0.01$ zamanında, $\hbar = -1$ değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözüm eğrileri ile tam çözüm eğrilerinin uyumlu olduğu görülmektedir.



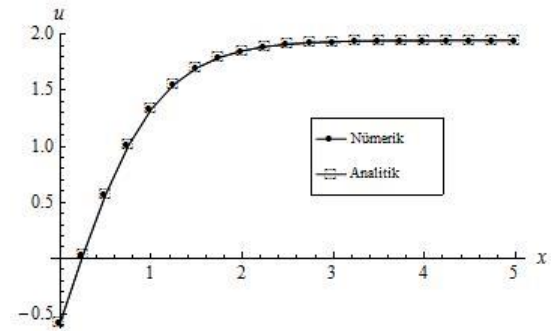
Şekil 7. $\alpha = 0.5, x = 0.2$ ve $t = 0.001$ değerlerindeki $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi



Şekil 8. $\alpha = 0.75, x = 0.2$ ve $t = 0.001$ değerlerindeki $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi



Şekil 9. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 10. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması

Çizelge 3.-Çizelge 4. de problemin, $t = 0.01, \hbar = -1$ ve farklı α değerlerindeki $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözümü ile karşılaştırılması ve mutlak hataları verildi. Göz önüne alınan değerlerde yaklaşık çözüm ile tam çözümün uyumlu olduğu ve mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu çizelgelerden açıkça görülür.

Çizelge3. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

x	$u(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	-0.64845	-0.64845	5.368×10^{-6}
0.2	-0.52615	-0.52616	5.112×10^{-6}
0.3	-0.40373	-0.40374	4.651×10^{-6}
0.4	-0.28179	-0.28179	4.014×10^{-6}
0.5	-0.16092	-0.16093	3.246×10^{-6}
0.6	-0.04172	-0.04172	2.396×10^{-6}
0.7	0.07527	0.07527	1.515×10^{-6}
0.8	0.18955	0.18955	6.507×10^{-7}
0.9	0.30067	0.30067	1.542×10^{-7}
1.0	0.40821	0.40821	8.669×10^{-7}

Çizelge4. $t = 0.01, \hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

x	$u(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	-0.43580	-0.43580	6.679×10^{-7}
0.2	-0.19247	-0.19247	5.174×10^{-7}
0.3	0.04485	0.04485	3.015×10^{-7}
0.4	0.27187	0.27187	7.193×10^{-8}
0.5	0.48507	0.48507	1.251×10^{-7}
0.6	0.68183	0.68183	2.617×10^{-7}
0.7	0.86054	0.86054	3.306×10^{-7}
0.8	1.02050	1.02050	3.408×10^{-7}
0.9	1.16183	1.16183	3.096×10^{-7}
1.0	1.28525	1.28525	2.555×10^{-7}

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin ve kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin Homotopi Analiz yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edildi. Yaklaşık çözümlerde bulunan $\hbar$ yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığını belirlemek için farklı α değerlerinde $\hbar$ —eğrileri çizildi. Her iki problem için çizilen bu $\hbar$ —eğrilerinden, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümleri yakınsak yapacak şekilde $\hbar$ yardımcı parametresinin birer aralığı tespit edildi. Sabit bir zamandaki yaklaşık çözüm ve tam çözüm eğrileri verildi. Bu eğrilerden, her iki problem için de ele alınan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin eğrileri tam çözümlerinin eğrileri ile ayırt edilemeyecek

şekilde aynı olduğu görüldü. Son olarak, ele alınan problemler için elde edilen nümerik çözümler, tam çözümler ile karşılaştırılarak mutlak hatalar tablolar halinde verildi. Mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu tablolardan görüldü.

Sonuç olarak, bu çalışmada ele alınan zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin ve kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlarından, yöntemin zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine alternatif bir yöntem olarak kullanılabileceği ifade edilebilir.

5. Kaynaklar

- Abbasbandy S., 2006. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters A*, **360**, 109–113.
- Abbasbandy S., Hashemi M.S. and Hashim I., 2013. On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations. *Quaestiones Mathematicae*, **36**, 93-105.
- Çenesiz Y., Baleanu D., Kurt A. and Tasbozan O., 2016. New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative. *Waves in Random and Complex Media*, **27**, 103-116.
- Çenesiz Y., Tasbozan O. and Kurt A., 2017. Functional Variable Method for conformable fractional modified KdV-ZK equation and Maccari system. *Tbilisi Mathematical Journal*, **10**, 117-125.
- Çenesiz Y., Tasbozan O. and Kurt A., 2017. On the New Solutions of the Conformable Time Fractional Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV System. *Analele Universitatii de Vest, Timişoara Seria Matematica-Informatica LV*, **55**, 37- 49.
- Debnath L. and Bhatta D., 2007. Integral Transforms and Their Applications, Chapman-Hall/CRC, USA.
- Esen A., Tasbozan O. and Yagmurlu N. M., 2012. Approximate Analytical Solutions of the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation Using Homotopy Analysis Method and a Comparison with Other Methods. *Çankaya University Journal of Science and Engineering*, **9**, 139-147.
- Esen A., Yagmurlu N. M. and Tasbozan O., 2013. Approximate Analytical Solution to Time-Fractional Damped Burger and Cahn-Allen Equations. *Applied Mathematics & Information Sciences*, **7**, 1951-1956.

- Eslami, M. and Rezazadeh, H., 2016. The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo*, **53**, 475–485.
- Eslami M., Rezazadeh H., Rezazadeh M. and Mosavi S.S., 2017. Exact solutions to the space–time fractional Schrödinger–Hirota equation and the space–time modified KDV– Zakharov–Kuznetsov equation. *Optical and Quantum Electronics*, **49**, 279.
- Hilfer P., 2000. Various Approaches to the Fractional Calculus Applications of Fractional Calculus In Physics. World Scientific, Germany.
- Hosseini K., Bekir A. and Ansari R., 2017. New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method. *Optik*, **132**, 203–209.
- Hosseini K., Bejarbaneh E. Y., Bekir A. and Kaplan M., 2017. New exact solutions of some nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type. *Optical and Quantum Electronics*, **49**, 241.
- Iyiola O.S., Taşbozan O., Kurt A. and Çenesiz Y., 2017. On the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1-D diffusion. *Chaos, Solitons and Fractals*, **94**, 1–7.
- Kaplan M., 2017. Applications of two reliable methods for solving a nonlinear conformable time-fractional equation. *Optical and Quantum Electronics*, **49**, 312.
- Kaplan M., Bekir A. and Ozer M. N., 2017. A simple technique for constructing exact solutions to nonlinear differential equations with conformable fractional derivative. *Optical and Quantum Electronics*, **49**, 266.
- Khalil, R. and Horani, M.A., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, **264**, 65–70.
- Khodadad F. S., Nazari F., Eslami M. and Rezazadeh H., 2017. Soliton solutions of the conformable fractional Zakharov–Kuznetsov equation with dual-power law Nonlinearity. *Optical and Quantum Electronics*, **49**, 384.
- Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 0304-0208, vii s., New York.
- Kumar D., Hosseini K. and Samadani F., 2017. The Sine-Gordon Expansion Method to Look For The Traveling Wave Solutions of The Tzitzeica Type Equations in Nonlinear Optics. *Optik*, **149**, 439–446.
- Kurt, A., Çenesiz, Y. and Taşbozan, O., 2015. On the Solution of Burger’s equation with the new fractional derivative. *Open Physics*, **13**, 355–360.
- Kurt A., Taşbozan O. and Baleanu D., 2017. New solutions for conformable fractional Nizhnik–Novikov–Veselov system via G'/G expansion method and homotopy analysis methods. *Optical and Quantum Electronics*, **49**, 333.
- Kurt, A., Taşbozan, O. and Çenesiz, Y., 2016. Homotopy Analysis Method for Conformable Burgers-Korteweg-de Vries Equation. *Bulletin of Mathematical Sciences and Applications*, **17**, 17–23.
- Liao, S.J., 2003. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. CRC Press, Chapman & Hall, Boca Raton.
- Liao, S.J., 2009. Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, **14**, 983–997.
- Miller, K.S. and Ross, B., 1993. An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. J. Wiley-Sons, Canada.
- Molabahrami A. and Khani F., 2009. The homotopy analysis method to solve the Burgers-Huxley equation. *Nonlinear Anal. B: Real World Appl.*, **10**, 589–600.
- Oldham K.B., Spanier J., 1974. The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- Podlubny, L., 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, London. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., 1993. Fractional Integrals and Derivative Theory and Applications, Gordon and Breach, 160 s, Longhorne.
- Taşbozan, O., Çenesiz, Y. and Kurt, A., 2016. New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV–mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method. *The European Physical Journal Plus*, **131**, 244.
- Taşbozan O., Esen A. and Yağmurlu N. M., 2012. Approximate Analytical Solutions of Fractional Coupled mKdV Equation by Homotopy Analysis Method. *Open Journal of Applied Sciences*, **2**, 193–197.
- Yavuz M., 2017. Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, **8**, 1–7.
- Zhang X., Tang B. and He Y., 2011. Homotopy analysis method for higher-order fractional integro-differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **62**, 3194–3203.