



## Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (BAİBÜEDF)

Bolu Abant İzzet Baysal University  
Journal of Faculty of Education

2026, 26(2), 740 –765. <https://dx.doi.org/10.17240/aibuefd.2026.- 1829328>



### Matematiksel Çalışmanın Doğasına Bilişsel ve Epistemolojik Bir Yaklaşım: Duru'nun Matematiksel Çalışma Uzayı

A Cognitive and Epistemological Approach to the Nature of Mathematical Work: Duru's Mathematical Working Space

Leyla AYDURMUŞ<sup>1</sup> , Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN<sup>2</sup>

Geliş Tarihi (Received): 24.11.2025

Kabul Tarihi (Accepted): 18.06.2026

Yayın Tarihi (Published): 30.06.2026

**Öz:** Matematiksel Çalışma Uzayı (MWS) sınıf ortamında öğretmen ve öğrencilerin gerçekte ne ile meşgul olduklarını anlamlandırmamıza olanak sağlayan kapsamlı analiz çerçevesi sunan bir kuramdır. Matematiksel çalışmanın karakteristiğini epistemolojik düzlemle matematik, bilişsel düzlemle öğrenci aktivitesi üzerinden açıklamaktadır. Bu çalışmayla kuramın yurtiçi literatürde tanınırlığının artırılması, matematiksel çalışmayı açıkladığı kavramları gerçek bir çalışma süreci ile ifade edilmesi amaçlanmıştır. Araştırma tamamlanmış bir matematiksel çalışmanın ortaya konulması amacıyla BİLSEM'e devam eden 8. sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmada MWS'de ifade edilen zengin içerikli matematiksel görev olarak şekilsiz geometri problemi kullanılmıştır. Nitel desende gerçekleştirilen çalışmada veriler yapılandırılmış gözlem formu, öğrenci çalışma kağıtları, alan notları, görüşme ile elde edilmiştir. Problemin analiz a priori ve oluşturulan analiz çerçevesi kullanılarak öğrencinin çalışma uzayı tanımlanmıştır. Elde edilen bulgular öğrencinin çalışma uzayında MWS'nin semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlarının ve yönelimlerinin belirlenebildiğini göstermiştir. Sonuç olarak MWS'nin etkili görev tasarımı, matematiksel çalışmanın analiz a priori- posteriorinin gerçekleştirilmesi, kişisel çalışma uzaylarını tanımlama, öğrenme ortamında karşılaşılan zorlukları belirleme gibi pek çok başlıkta araştırmacılara destek sağlayabilecek potansiyeli ortaya konulmuştur. Araştırmacılara MWS'yi matematiğin farklı alanlarında ve farklı bağlamlarda matematiksel çalışma sürecinin incelenmesinde kullanmaları önerilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Matematiksel çalışma, MWS, Çalışma uzayı

&

**Abstract:** The Mathematical Working Space (MWS) is a theoretical framework that provides a comprehensive analytical lens for understanding what teachers and students actually engage with in the classroom. It characterizes mathematical activity through two planes: the epistemological plane, which concerns mathematics itself, and the cognitive plane, which is grounded in students' activity. The aim of this study is to increase the visibility of the framework within the national literature and to illustrate the concepts through which it explains mathematical work by presenting an authentic working process. The research was conducted with an 8th-grade student attending a Science and Art Center (BİLSEM) to present a completed mathematical working process. In the study, a figureless geometry problem was used as a mathematically rich task, as defined within the MWS framework. Employing a qualitative research design, data were collected through a structured observation form, student worksheets, field notes, and an interview. Using the a priori analysis of the problem together with the constructed analytical framework, the student's working space was identified. The findings indicate that the semiotic, instrumental, and discursive geneses and orientations of the MWS could be clearly observed within the student's working space. In conclusion, the study demonstrates the potential of the MWS framework to support researchers in several areas, including effective task design, conducting a priori and a posteriori analysis of mathematical work, identifying personal working spaces, and determining difficulties encountered in learning environments. It is recommended that researchers apply the MWS framework to examine mathematical working processes across different domains of mathematics and in various contexts.

**Keywords:** Mathematical work, MWS, Working space

**Atıf/Cite as:** Aydurmuş, L. & Özdemir Erdoğan, E. (2026). Matematiksel çalışmanın doğasına bilişsel ve epistemolojik bir yaklaşım: Duru'nun matematiksel çalışma uzayı. *Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 26(2), 740-765. DOI: 10.17240/aibuefd.2026.- 1829328.

**İntihal-Plagiarism/Etik-Ethic:** Bu makale, en az iki hakem tarafından incelenmiş ve intihal içermediği, araştırma ve yayın etiğine uyulduğu teyit edilmiştir. / This article has been reviewed by at least two referees and it has been confirmed that it is plagiarism-free and complies with research and publication ethics. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/aibuefd>

**Copyright** © Published by Bolu Abant İzzet Baysal University– Bolu

\* Bu araştırma, birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında yürüttüğü "Özel Yetenekli Öğrencilerin Geometrik Muhakemelerinin Matematik Çalışma Uzayı Çerçevesinde İncelenmesi" adlı doktora tezinin bir kısmından oluşturulmuştur.

<sup>1</sup> Sorumlu Yazar: Dr. Leyla AYDURMUŞ, Milli Eğitim Bakanlığı, [leylacopur@gmail.com](mailto:leylacopur@gmail.com), ORCID: [0000-0001-5188-6225](https://orcid.org/0000-0001-5188-6225)

<sup>2</sup> Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN, Anadolu Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, [eoerdogan@anadolu.edu.tr](mailto:eoerdogan@anadolu.edu.tr), ORCID: [0000-0003-2703-9530](https://orcid.org/0000-0003-2703-9530)

## 1. GİRİŞ

Matematik öğretiminde öğrencileri bilgiyi edilgen öğrenen konumundan çıkararak alanı keşfeden araştırmacılar ve acemi matematikçiler olarak değerlendirmek çağdaş eğitim yaklaşımlarının temelini oluşturmaktadır (Kuzniak vd., 2016a). Bu yaklaşımın öğrencileri matematiği bilen konumundan matematiği bizzat yapan konumuna getirdiği görülmektedir. Ancak öğrencilere ait matematiksel çalışmanın okul paradigması sınırları içinde değerlendirilmesi gerektiği ve bu çalışmanın matematiğin öğretilmesi ve öğrenilmesi için kilit nokta olduğu kabul edilmektedir (Kuzniak & Nechache, 2021; Kuzniak, 2022). Matematiksel çalışma doğası gereği uzun ve yinelemeli bir sürecin ürünü olmalıdır. Matematikçilerin tanımladığı ideal ortam bu çalışma için yeterli bir model sunamamaktadır (Kuzniak, 2022). Matematiksel çalışmanın onu gerçekleştiren bireye bağlı epistemolojik boyutla ilişkili bilişsel boyutu içermesi bu karmaşık yapının anlaşılmasını zorlaştırmaktadır (Houdement & Kuzniak, 1999; Kuzniak vd., 2016a; Kuzniak & Rauscher, 2011). Eğitim kapsamında öğrencilerin yeni bir görevde izleyeceği yol; önceki tecrübeleri, matematikçilerin önceki çalışmaları ve öğretmenlerinin çalışmaları ile şekillenmektedir (Kuzniak vd., 2016a). Matematiksel çalışmanın bu karmaşık doğasının açıklanması ve eğitim ortamında karşılaşılan zorlukların anlaşılması için gerçekleştirilen araştırmalar sonucunda Kuzniak ve arkadaşları tarafından öncelikle Geometri Çalışma Uzaı yaklaşımı ortaya konmuş ve daha sonra bu yaklaşım Matematiksel Çalışma Uzaı (Mathematical Working Spaces: MWS)<sup>4</sup> Teorisi'ne genişletilmiştir (Houdement & Kuzniak, 1999; Kuzniak & Rauscher, 2011). MWS Teorisi özellikle Fransızca ve İspanyolca konuşulan ülkelerde geniş bir kullanım alanı bulmuşken Türkiye bağlamında gerçekleşen çalışmaların ise sınırlı kaldıkları görülmektedir (Deniz, 2024; İmamoğlu vd., 2023; Karahan, 2021). Oysaki MWS kaynak aldığı teorilerin bir sentezi olmanın ötesine geçerek gerçek bir çalışma ortamının ve matematiksel içeriğin epistemolojik ve bilişsel açıdan incelenmesine olanak sağlar. Bu teori, öğrencilerin matematiksel eylemlerinin temsil, araç kullanımı ve söylemler aracılığıyla açıklanabildiği çok boyutlu bir yapı sunmaktadır (Kuzniak, 2011; Radford, 2016). Türkiye'de matematik öğretim programlarının beceri temelli bir yapıya evrilmesi ve programda matematiksel etkinliklerde temsil, araç kullanımı ve muhakeme süreçlerine yapılan vurgu birlikte değerlendirildiğinde MWS yaklaşımının bu bağlamda ele alınması anlamlı hale gelmektedir. Ayrıca Fransız didaktik geleneğinden beslenen MWS, referans, uygun ve kişisel çalışma uzaıları aracılığıyla öğretim programının öngördüğü ile öğrencinin gerçekte ortaya koyduğu matematiksel çalışma arasındaki farkı görünür kılma potansiyeli taşımaktadır. Bu nedenle MWS'nin Türkiye bağlamında tartışılması, bilişsel süreçlerin nasıl yapılandırıldığını anlamaya yönelik önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

Buradan hareketle bu çalışmanın amacı, Matematiksel Çalışma Uzaı Teorisi'nin yurtiçi literatürde görünürlüğünü artırmak, teorinin kavramlarının matematiksel çalışmayı açıklamadaki rolünü gerçek bir çalışma süreci ve oluşan çalışma uzaı üzerinden ifade etmektir. Bu amaç doğrultusunda, özel yetenekli öğrencilere uygulanan bir görevde bir öğrencinin matematiksel çalışma uzaı üzerinden teorinin bilişsel düzlem, epistemolojik düzlem ve oluşumlar ile ifade ettiği yapıların ortaya çıkarılması hedeflenmiştir.

### 1.1. Teorik Çerçeve: Matematiksel Çalışma Uzaı

Matematiksel Çalışma Uzaı (MWS) teorisi, kökenini Fransız matematik didaktiği geleneğinde gelişen teorilerden alır: Didaktik Durumlar Teorisi, Aktivite Teorisi ve Kavramsal Alanlar Teorisi (Kuzniak & Vivier, 2019). Radford (2016), bu kuramı, matematiğin öğretimi ve öğrenimine ilişkin sorunlara tutarlı açıklamalar getiren didaktik teorilerin nitelikli bir sentezi olarak tanımlar. Artigue (2016) ise MWS'nin, kendisinden önceki teorilerden daha esnek bir yapıya sahip olduğunu ve matematik alanında geliştirilen farklı modelleri de içine alabilecek bir esneklik sunduğunu belirtir. Teorinin merkezinde, matematiksel tutarlılığa duyarlı epistemolojik bir yaklaşım yer alır.

4 Teorinin ismi Türkçe'ye çevrilirken hem teorinin Fransızca orijinal adı "Espace de Travail Mathématique" hem İngilizce karşılığı "Mathematical Working Spaces" hem de Türkçe'deki terim kullanımı göz önünde bulundurularak "Matematiksel Çalışma Uzaı" ifadesi, kısaltma olarak da İngilizce kısaltması MWS'nin kullanımı tercih edilmiştir.



MWS ile gerçekleştirilen çalışmalar bu modelin matematiksel etkinlikleri analiz etmek için oldukça kapsamlı bir çerçeve sunduğunu göstermektedir. Teorideki oluşumların ikili ilişkisi ile üç dikey düzlem: semiyotik-enstrümantal, semiyotik-söylemsel, enstrümantal-söylemsel tanımlanmıştır (Richard vd., 2016). MWS matematiksel çalışma türlerini de kurumsaldan özele doğru tanımlandığı üç düzeyde sırayla referans, uygun ve kişisel çalışma uzayları olarak ele almaktadır (Kuzniak, 2022). Ayrıca çalışmanın gerçekleştirildiği matematik alanına bağlı olarak MWS<sub>cebir</sub>, MWS<sub>aritmetik</sub>, MWS<sub>geometri</sub> vb. şeklinde çeşitlendirilebilmektedir. Bu çalışma alanları arası geçişler dış fibrasyon, MWS'nin bilişsel ve epistemolojik düzlemleri arası geçişler iç fibrasyon kavramları ile tanımlanmıştır (Richard vd., 2016). Teorinin epistemolojik hassasiyeti sayesinde kimya ve fizik gibi disiplinlerde de uygulanabildiği görülmektedir (Moutet, 2018; 2019; 2021).

## 1.2. MWS'de Görev

MWS 'de bir görev sadece çözülecek bir problem değil, öğrencinin bilişsel süreçlerini harekete geçirecek özelliklere sahip olmalıdır. Bu görev, öğrencide teorideki en az üç süreçten bir kısmını harekete geçirmelidir (Kuzniak & Vivier, 2019). Bu süreçlerin etkin biçimde devreye girmesi, bilişsel ve epistemolojik düzlemler arasında dolaşım yaratır. MWS'ye göre bu dolaşımın kurulabildiği görevler “tam ve eksiksiz matematiksel çalışma” üretme potansiyeline sahiptir (Kuzniak & Nechache, 2015; Kuzniak vd., 2016b; Kuzniak & Nechache, 2017). MWS görevin karmaşıklığına göre basit, standart ve zengin içerikli üç görev sınıflaması yapmaktadır (Nechache, 2017). MWS tasarlanan görevlerin değerlendirilmesinde analiz a priori ve posteriori için uygun bir yapı sunmaktadır. Matematiksel çalışmanın epistemolojik düzleme bağlı kısmı a priori beklentileri tanımlar (Kuzniak & Nechache, 2015). MWS'nin bilişsel düzlemi posteriori analiz uygulama sonucunda ortaya çıkan a priori analizle eşleşen gerçek süreçleri incelemektedir (Lagrange & Laval, 2022). Teorinin bu arka planı bir görevin taşıdığı potansiyel ile gerçekte ortaya çıkan arasındaki farkı belirlemede etkili bir yapı sunmaktadır.

## 1.3. MWS'de Epistemolojik Düzlem

Epistemolojik düzlem matematiksel kriterlere göre düzenlenmiş birbiri ile etkileşim halinde üç bileşen içermektedir. Görevi eğitimsel amaca uygun tasarlanan matematiksel ortamın temsil, artefakt ve referans bileşenlerine göre bir modelini sunmaktır. Temsil bileşeni soyut matematiksel nesneler hakkında konuşabilmemize olanak sağlamaktadır. Bir temsilden daha fazlası olan semiyotik temsile uygun olarak somut, elle tutulur nesnelerle ilişkili bileşenin özeti olarak temsil terimi kullanılmıştır (Kuzniak vd., 2016a). Matematik alanı içerisinde cebirsel semboller, geometrik şekiller, grafik, işaretler, vb. bu kapsamdadır. Artefakt kavramı Rabardel (1995)'den uyarlanmış ancak teori içinde modelin diğer bileşenleri ile karışmasını önlemek amacıyla pergel, cetvel, DGY gibi somut araçlarla sınırlandırılmıştır (Kuzniak vd., 2016a). Referans bileşeni matematiğin yığılmalı yapısı ile ilişkilidir. Matematiksel görevin kurumsallaşmasını sağlayan teorem, özellik, tanım, aksiyomatik yapıyı içermektedir. Matematiğe özgü tümdengelsel ispatı destekleyen bileşendir (Kuzniak, 2022). Epistemolojik düzlem somut, çizim araçları, yazılım, tanım, teorem, matematiksel özelliklere dayanan bir referans sistemini içermekle birlikte bir matematikçinin faaliyeti olmadan işlev kazanamaz (Radford, 2016). Burada ifade edilen matematiksel bilginin bilişsel düzlemde karşılığının olmasıdır.

## 1.4. MWS'de Bilişsel Düzlem

Bilişsel düzlem Duval (1995)'in geometrik muhakemeyi açıklamak için kullandığı görselleştirme, oluşturma ve ispatlama bileşenlerinden uyarlanmıştır (Kuzniak & Rauscher, 2011). Görselleştirme temsil ve işaretlerin deşifre edilmesi, bu temsillerin atıfta bulunduğu kavram ve ilişkiye ait içsel temsillerin oluşmasıdır. Görselleştirme işaretlerin basitçe algılanması ve görülmesi değildir (Kuzniak, 2022). Örneğin “L” sembolünün matematik çalışma içinde açığa işaret ettiğinin çözümlenmesi görselleştirme kapsamındadır. Oluşturma, görev sırasında kullanılan teknik ve araçla ilişkili bileşendir. Oluşturma sonucunda ortaya çıkan yapı üzerindeki eylem ve gözlemlenen ilişkiler temsil ettiği matematiksel nesnenin

modeli olarak işlev kazanır (Duval, 1995). Oluşturma sürecinin matematiksel bir eylem sürecinin ürünü olması ve matematiksel anlamayı gerektirdiği ifade edilebilir. Bilişsel düzlemin son bileşeni ispatlama tümdengelsel, mantıksal söylemlere, doğrudan teorik yapıda argümanlara dayanmalı veya bunları ortaya çıkarmalıdır (Kuzniak, 2022).

### 1.5. MWS’de Oluşumlar (Semiyotik, Enstrümantal ve Söylemsel)

Matematiksel çalışmanın gelişimi, epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasında kurulan geçişlere dayanır (Kuzniak, 2022). MWS bu geçişleri açıklamak için üç oluşum tanımlar: semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar. Bu oluşumlar iki düzlem arasında (epistemolojiktan bilişsele ya da bilişselden epistemolojik düzleme doğru işleyen) iki yönlü etkileşimi yapılandırarak tutarlı ve eksiksiz bir matematiksel çalışma ortaya çıkarır (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015).

**Semiyotik Oluşum:** semiyotik temsil sistemleri ile ifade edilen matematiksel nesnelere ilişkin sözdizimsel (sentaktik) ve anlamsal (semantik) perspektifler arasındaki diyalektik ilişkiyi ifade etmektedir. Bu oluşum temsillerin matematiksel anlamlarının fark edilmesini içermekle birlikte matematiksel nesneler üzerinde işlem yapılmasına olanak sağlar. Epistemolojik düzlemde bilişsele, yani temsilden görselleştirmeye doğru gerçekleşen oluşum temsillerin kodunu çözme ve yorumlama, tersi yönde oluşum kodlama ve örnekleme olarak tanımlanmaktadır (Duval, 2005; Kuzniak, 2022). Örneğin kenar uzunlukları ölçüleri 3 cm, 4 cm, 5 cm olan üçgenin çeşitkenar üçgen olarak kodunun çözülmesi aşağıdan yukarıya gerçekleşen bir oluşumken, bilişsel düzlemde gerçekleşen eylemlere bağlı dik açılı üçgen olarak kodlanması yukarıdan aşağıya gerçekleşen semiyotik bir oluşumdur.

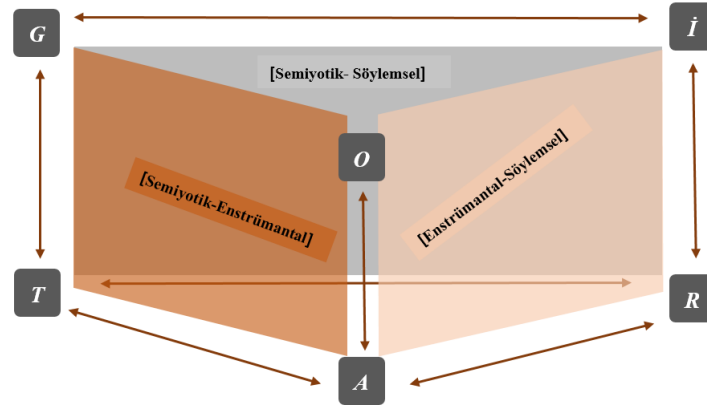
**Enstrümantal Oluşum:** matematiksel görevin tamamlanmasında bu sürece destek veren araç ve tekniklerin işlevsel hale getirilmesini sağlamaktadır (Kuzniak vd., 2016a). Rabardel (1995) bir aracın onu kullanan bireyde bilişsel şemalar meydana getirdiğinde enstrümana dönüştüğünü ifade etmektedir. MWS kapsamında enstrümantal oluşum hem bireyi hem de matematiksel bilgiyi dönüştüren somut araçlarla gözlemlenebilir inşa süreçlerini birbirine bağlayan nesnel bir yapıdır (Lagrange & Richard, 2022). Enstrümantal oluşum matematiksel ispat gerçekleştirme, bir şekli inşa etme, farklı konfigürasyonlar oluşturma, kanıt aramak gibi farklı bilişsel ihtiyaçları karşılamaktadır (Barrera, 2013). Bu kapsamda aşağıdan yukarı gerçekleşen oluşum aracın içselleştirilmesi, tekniklerin benimsenmesi, yukarıdan aşağı yönelim görevin başarılmasından sonra göreve uygun aracın belirlenmesiyle ilişkilidir (Kuzniak, 2022). Enstrümantal oluşum sonucunda bireyin düşünme biçimi, sonucunda matematiksel bilgi dönüşür (Lagrange & Richard, 2022).

**Söylemsel Oluşum:** referans sisteme bağlı özelliklerin ve düzenlenen sonuçların matematiksel muhakeme ve sonuçların doğrulanması için kullanılabilir hale getirilme sürecidir (Kuzniak, 2022). Öğrencilerin öngörülleri, elde ettikleri sonuçları doğrulamaları, verilen durumdaki hatayı algılama, çelişkileri fark etme, göreve yansıtıkları bağlılık, belirgin bir strateji seçilmesi söylemsel oluşuma ilişkindir (Hitt vd., 2016). Söylemsel oluşum deneysel ve araçsal doğrulamaların ötesinde olmakla birlikte bu uygulamalar tarafından tetiklenebilir (Kuzniak vd., 2022). Örneğin DGY ile keşfedilen bir ilişki teorik doğrulamayı ortaya çıkarabilir. Bu tarz bir oluşum araçsal, hesaplamalı ve görsel uygulamalardan kaynaklanması, referansa dahil edilecek ilişkilerin, tanımların belirlenmesini içermesi bakımından yukarıdan aşağı (Kuzniak, 2022) yönelimde gerçekleşmiştir. Aşağıdan yukarı doğru gerçekleşen oluşumda ispat matematiksel özelliklerle desteklenmekte ve tümdengelsel bir yapıdadır. Kenar uzunluk ölçüleri verilen bir üçgenin açılal özelliğinin Pisagor bağıntısı ile doğrulanması bu oluşuma örnek olarak verilebilir.

### 1.6. MWS’de Dikey Düzlemler

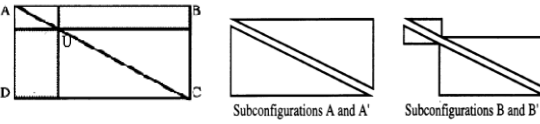
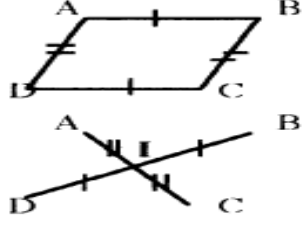
Bilişsel ve epistemolojik düzlemler arasındaki etkileşim, oluşum süreçlerinin ikili ilişkisi üzerinden üç dikey düzlem ortaya çıkarır. Oluşum çiftlerine dayalı bu sınıflandırma; modelleme (semiyotik–söylemsel), keşif (semiyotik–enstrümantal) ve doğrulama (enstrümantal–söylemsel) düzlemlerini içerir (Coutat & Richard, 2011’den akt. Kuzniak vd., 2016a). Richard vd. (2016) ise bu dikey düzlemleri matematiksel çalışmanın işlevsel aşamalarıyla ilişkilendirerek, semiyotik–enstrümantal düzlemi keşif ve araştırma;

semiyotik-söylemsel düzlemi iletişim ve temsil; enstrümantal-söylemsel düzlemi ise gerekçelendirme ve muhakeme süreçleriyle eşleştirmiştir. Böylece ilk sınıflandırma oluşumların yapısına odaklanırken, ikinci sınıflandırma bu yapıların matematiksel çalışmadaki işlevlerini açıklamaktadır. Şekil 2'de sunulan bu yapı, matematiksel çalışmanın farklı aşamalarının hangi oluşum ilişkileriyle yürüdüğünü göstermektedir.



Şekil 2. MWS'de dikey düzlemler

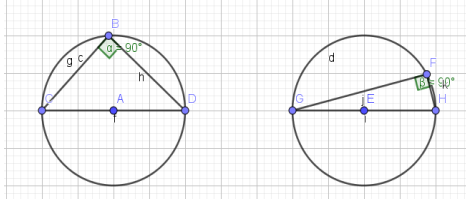
Matematik görevinin gerçekleşmesinde oluşumlardan birinin rehberliğinde diğer oluşuma geçiş sağlanabilmektedir. Semiyotik – söylemsel düzlemde ispat şekil üzerinde manipülasyonla gerçekleşiyorsa sem. → söy., açıkça tanımlanan matematiksel özellik, teoremlere dayalı ispat şekil üzerine sıralı şekilde uygulanıyorsa söy. → sem. yönelimi gerçekleşmektedir (Kuzniak vd., 2016a). İfade edilen duruma ilişkin Duval (1998)'den alınan örnek Şekil 3'te sunulmuştur.

| Semiyotik → Söylemsel                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Söylemsel → Semiyotik                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Aşağıdaki şekilde AC, ABCD dikdörtgeninin köşegenidir. U noktası köşegen üzerinde hareket ederken iki gri dikdörtgenin alanlarını karşılaştırınız</p>  <p>Subconfigurations A and A'</p> <p>Subconfigurations B and B'</p> | <p>ABCD bir paralelkenar olsun</p>  <p>Paralelkenar oluşumunda paralelkenarın farklı özelliklerine vurgu yapan olası konfigürasyonlarından bazıları yukarıdaki gibidir.</p> |

Şekil 3. Semiyotik-söylemsel farklı oluşum yönelimleri

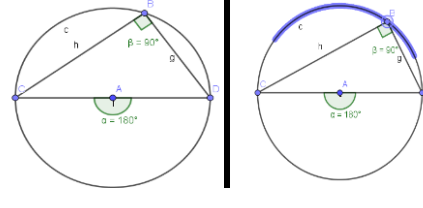
Enstrümantal-söylemsel oluşum düzleminde ispatın araç kullanımından kaynaklanan keşif veya teorik yapıya dayalı ifade edilen bir durumun deneysel doğrulanması yer almaktadır. Araç kullanımını içeren tümevarımsal akıl yürütme, ampirik doğrulama enstrümantal yönü baskın bir düzleme işaret etmektedir (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015; Kuzniak vd., 2016a). Söylemsel oluşumun yönlendirdiği süreçte tüm dengeli ispat araçla, deneysel doğrulama içermektedir. Bu durum Şekil 4'te örneklendirilmiştir.

## Enstrümantal → Söylemsel



Burada farklı çemberler çizilerek çember üzerindeki noktanın farklı konumları için çevre açısı ölçülerek çapı gören çevre açının ölçüsünün  $90^\circ$  olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

## Söylemsel → Enstrümantal



Çapı gören çevre açının ölçüsünün  $90^\circ$  olduğu ve bu durumun çember üzerindeki tüm noktalar için geçerli olduğunun gösterimi için sürüklemeye ve iz bırakma özelliği kullanılmıştır.

Şekil 4. Enstrümantal-söylemsel düzlem farklı oluşum yolları

Enstrümantal-söylemsel oluşum herhangi bir yön içermeyen, aracın özellikleri ve teorik yapının iç içe temel oluşumları içerebilir (Kuzniak vd., 2016a). Semiyotik – enstrümantal oluşum DGY ve dijital araçların matematik eğitiminde kullanılmasıyla önem kazanmıştır (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015). Bu düzlemde klasik ve dijital araçların ortaya çıkardığı görünür sonuçlar keşif faaliyetini desteklemektedir (Kuzniak, 2022). Semiyotik düzlemin öncülüğünde araç kullanımını teşvik eden semiyotik bir görev enstrümantal oluşumu gerektirmektedir. Cebirsel formda verilen bir fonksiyonun Geogebra ile grafik temsili oluşturulması örnek olarak verilebilir. Enstrümantal oluşumu esas alan bir görevin semiyotik oluşumu teşvik etme potansiyeli bulunmaktadır. Örneğin açıölçer ile bir açının ölçüsünün belirlenmesi açığı oluşturan figüratif temsili bileşenlerinin (açının kolları, köşesi, açının iç kısmı) semiyotik oluşumunu destekler (Kuzniak, 2022).

### 1.7. Matematiksel Çalışma Uzaı Türleri: Referans, Uygun, Kişisel

MWS okul matematiğini temel alır ve bu bağlamda öğrencilerin matematiksel çalışmalarının tutarlı bir şekilde gerçekleştirilmesinde eğitim kurumları ve sınıf içi süreci yönlendiren öğretmenler belirleyicidir (Kuzniak vd., 2016a).

**Referans MWS:** Bu çalışma uzaı çalışılan alanın ilişkili olduğu kurum ve kuruluş tarafından belirlenen ve o alanın kurumsallaşmış çalışma biçimini ifade eder. Referans MWS’de temel kaynak teoriler olmakla birlikte tarihsel, epistemolojik, bilişsel, kurumsal, sosyal, ekonomik, kültürel ve politik kriterlerde etkilidir (Kuzniak, 2022; Montoya-Delgadillo & Reyes Avendaño, 2022). Referans matematiksel çalışma uzaı matematik eğitiminden sorumlu kurumlardan beklenen çalışmayı karşılamaktadır. Daha açık ifade edilirse ders kitapları, epistemoloji, didaktik çalışmaları, tezler, makaleler, eğitim toplantıları gibi kapsamlı çalışmaların sonucudur (Kuzniak, 2022). Bu MWS’nin kullanıcıları öğretmenler, araştırmacılar, müfredat hazırlayanlar, öğretmen eğitimi görevlileri, kitap yazarları olarak söylenebilir (Montoya-Delgadillo & Reyes Avendaño, 2022).

**Uygun MWS:** Bu çalışma uzaı öğretmenin referans MWS’yi esas alarak öğretimsel beklentileri öğrencilerin gerçekliğine ve sınıfın pedagojik koşullarına uygun dönüşümleri gerçekleştirdiği çalışma uzaıdır (Kuzniak, 2022). Uygun MWS öğretimin sınırlarına ve pedagojik zorluğun gerektirdiklerine uygun olarak gerçekleşmekte, öğretmen ve öğrencinin süreçteki rolünü belirlemektedir (Henríquez vd., 2022). Öğretmenin planladığı, ancak henüz uygulanmamış çalışma potansiyel (a priori) MWS olarak, sınıfta fiilen gerçekleşen çalışma ise gerçek (actual) uygun MWS olarak tanımlanır. (Henríquez-Rivas vd., 2022). Gerçek uygun MWS, uygulama sonrasında yapılacak a posteriori yorumlamalara olanak tanır.

**Kişisel MWS:** Bu çalışma uzaı uygun MWS’nin öğrenci tarafından gerçekleştirilen karşılığıdır. Bu çalışma uzaında öğrenciler kendi dönüşümlerini gerçekleştirmektedir (Kuzniak vd., 2016a). Kişisel MWS bilişsel ve epistemolojik tutarlılık göstermeyebilir. Bu yönüyle öğretimde engeller, yanlış anlamalar, kavram yanlışları, bir kuramın uygulamalarını belirlemeye imkan sunmakta, öğrencilerin yaşadıkları zorlukları anlayarak uygun MWS’nin geliştirilmesine katkıda bulunmaktadır (Menaes- Espinoza & Vivier, 2022).

MWS'nin tanımlanmasında öne çıkan başlıklar üzerinden teorinin matematik eğitimi çalışmaları açısından potansiyeli sunulmuştur. Farklı ülkelerde ve çeşitli bağlamlarda öğretmen, öğretmen adayları, öğrencilerin matematik sınıflarında oluşturdukları uzayların incelenmesi teorinin araştırmacıların bakış açılarına göre uyarlanabilen yapısını doğrulamaktadır (Derouet & Parzysz, 2016; Elia vd., 2016; Gagatsis vd., 2016; Montoya-Delgadillo vd., 2016; Panero vd., 2016; Pérez & Delgadillo, 2022; Pluvineage & Flores, 2016). Panqueban vd. (2024) MWS ile gerçekleştirilen çalışmaların %69 gibi yüksek oranda nitel paradigmayla ve gerçek durumlar üzerine gerçekleştirildiğini ortaya koymuşlardır.

Bu çalışmada da benzer bir yaklaşımla MWS'nin bileşenlerinin gerçek bir çalışmanın değerlendirilmesinde nasıl işe koşulduğunun sunulması hedeflenmiştir. Çalışmada Duru'nun şekilsiz bir geometri görevinde ortaya koyduğu matematiksel çalışma uzayı semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar üzerinden tanımlanmaya çalışılacaktır. Bu doğrultuda araştırmanın problemleri şu şekildedir:

- Öğrencinin verilen görev sürecinde ortaya çıkan matematiksel çalışma uzayının epistemolojik ve bilişsel bileşenleri nelerdir?
- Bu süreçte matematiksel çalışma uzayında semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar nasıl ortaya çıkmakta ve birbirleriyle nasıl etkileşim göstermektedir?

## 2. YÖNTEM

### 2.1. Araştırmanın modeli

Bu çalışmada nitel yaklaşım benimsenmiştir. Çalışma dört adımda gerçekleştirilmiştir: (1) veri toplama aracı olarak kullanılacak matematiksel çalışmanın probleminin belirlenmesi, (2) problem için analiz a priori'nin gerçekleştirilmesi, (3) verilerin toplanması, (4) posteriori analizlerin gerçekleştirilmesi.

### 2.2. Araştırmanın çalışma grubu

Bu araştırmada kullanılan görevler, MWS'nin tanımladığı biçimiyle tam ve eksiksiz matematiksel çalışma üreten zengin içerikli görevlerdir. Bu tür görevler üst düzey bilişsel yetkinlik gerektirdiğinden çalışma, zengin veriye ulaşmak amacıyla özel yetenekli öğrencilerle yürütülmüştür. Özel yetenekli öğrenciler akranlarına göre yüksek düzey bilişsel performans gösterme, hızlı problem çözme, soyut fikirleri manipüle etme ve ilişkilendirme kapasitesine sahiptir (MEB, 2017; VanTassel-Baska & Stambaugh, 2008). Tüm uygulamalara toplam 22 öğrenci katılmış olsa da tamamlanmış bir matematiksel çalışma sürecinin bilişsel bütünlüğünü aktarabilmek için bir öğrencinin (Duru olarak kodlanmıştır) verileri sunulacaktır. MWS'nin tanımladığı düzlemler arası dolaşım durumunun tek bir durum üzerinden birden fazla veri kaynağı ile ortaya konması öncelenmiştir. Sınırlandırılmış durumların birden fazla veri kaynağı kullanılarak ayrıntılı incelenmesi sonucunda sınırlandırılan duruma ilişkin temalar ortaya konmaktadır (Creswell, 2021). Duru'nun çalışma uzayı üç oluşum süreci için veri sunması bakımından tamamlanmış bir matematiksel çalışma niteliği taşımaktadır. Katılımcı öğrenci bir devlet okuluna devam etmekte olup BİLSEM'de ÖYG2 (Özel Yetenekleri Geliştirme) programına kayıtlıdır; kuruma beş yıldır devam etmekte ve iki yıldır araştırmacının dersine katılmaktadır. Araştırma kapsamında veli onamı ve öğrenci katılım onayı alınmıştır.

### 2.3. Veri toplama araçları ve süreci

Bu araştırmada veri toplama aracı olarak aşağıda verilen "Miras Kalan Tarla" adlı şekilsiz geometri problemi kullanılmıştır:

*Mete'nin ailesine köyde üçgen biçiminde bir tarla miras kalmıştır. Tarlanın bir kenarı Çoşandere Deresi ile ortaktır. Tarlanın kenar uzunlukları 200 m, 180 m ve 340 m olup dere kenarına denk gelen kenar 340 metredir.*

*Buna göre tarlanın alanını hesaplayınız ve tarlayı dere kenarı üzerinden iki eş üçgensel parçaya ayırınız."*

Araştırma öncesinde, öğrenciler arasında araç kullanım yeterliklerinin farklı olabileceği göz önünde bulundurularak kağıt katlama, cetvel–pergel ve GeoGebra kullanımına yönelik doğal öğretim sürecinin bir parçası olarak kısa destek eğitimleri verilmiştir. Problem çözme oturumu bireysel ya da grup çalışması yönlendirmesi yapılmadan yürütülmüş; öğrencilere yalnızca problem metninin bulunduğu çalışma kağıdı sunulmuştur. Cetvel–pergel, bilgisayar ve diğer araçlar öğrencilerin erişebileceği bir konumda bulundurulmuştur. Oturum boyunca kamera kaydı alınmış ve araştırmacı dışarıdan yalnızca gözlemci rolü üstlenmiştir. Yapılandırılmış gözlem formu, alan notları ve öğrenci çalışma kağıtları veri toplama araçları olarak kullanılmıştır (Güler vd., 2015). Oturum sonunda öğrencilerle kısa görüşmeler yapılmış; çalışma kağıtları, gözlem notları ve görüşme verileri birlikte değerlendirilmiştir.

#### 2.4. Verilerin analizi

Araştırma problemlerinin epistemolojik düzleme bağlı beklentiler çerçevesinde analiz a priori gerçekleştirilmiştir. Verilerin toplanmasıyla eş zamanlı görüşme dökümleri öğrenci çalışma kağıtları ve gözlem notları esas alınarak detaylandırılmıştır. Analiz a priori ve görüşmelerin dökümü sayesinde öğrencilerin çalışma uzaylarının ana hatlarıyla ortaya çıkması sağlanmıştır. Geriye dönük analizlerin yapılmasını kolaylaştırmıştır. Elde edilen veriler tasarlanan görevin epistemolojik düzlemiyle bilişsel düzlemi arasında kurulan ilişkinin ortaya çıkardığı oluşum ve yönelimlerini belirlemeye yönelik analiz edilmiştir. Analizlerin gerçekleştirilebilmesine olanak sağlayan probleme özgü analiz çerçevesi uygulama öncesi geliştirilmiştir. Analiz tablolarının şekillendirilmesi için literatürde oluşumlara yönelik tanımlamalar referans alınmış ve Tablo 1’de sunulan tanımlamalar kullanılmıştır. Oluşumların yönelimi için ayrıca öğrenci eylemleri, gözlem, kamera kayıtları, görüşme verileri kullanılmıştır.

**Tablo 1.**

*Oluşumlara Yönelik Referans Davranışlar*

| Oluşumlar           | Tanımlayıcılar                                                                                                                           |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Semi-yotik Oluşum   | Temsil edilenler ile temsil edenler arasında kurulan ilişki                                                                              |
|                     | Temsil edilen matematiksel nesnenin sözdizimsel ve anlamsal boyutu arasındaki ilişki                                                     |
|                     | Görsel, sembolik, sözel yapıda olma                                                                                                      |
|                     | Matematiksel anlamların fark edilmesi ve ifadesi                                                                                         |
|                     | Temsil ile temsil edilen nesneye fiziksel ve ikonik atıfta bulunma                                                                       |
|                     | Temsiller arası (sözel, sembolik, görsel) geçiş                                                                                          |
| Enstrümantal Oluşum | Görevin belli kısımlarını veya tek bir adımını araçla gerçekleştirme                                                                     |
|                     | Aracın tasarlanmadığı bir amaç için kullanımı veya başka bir araç yerine kullanımı                                                       |
|                     | Aracın özel bir kullanımını gerçekleştirme                                                                                               |
|                     | Araç ile bir şekli inşa etme                                                                                                             |
|                     | Aracın kullanım adımlarını açıklama                                                                                                      |
|                     | Araç yardımıyla şeklin farklı konfigürasyonlarını gerçekleştirme                                                                         |
|                     | Araç ile ispat gerçekleştirme                                                                                                            |
|                     | Başlangıçta ortaya çıktığı koşullar ve belirli eylemlerle bağlantılı olma ve lokallik                                                    |
| Söylemsel Oluşum    | İlerleyen zamanda bir eylem sınıfı, faaliyet nesneleri ve durumlarla ilişkili olarak aracın bir özelliği olarak kalıcı hale gelmesi      |
|                     | Referans sistemi olarak adlandırılan tanımlar, teoremler, aksiyomatik yapının matematiksel çalışma sonuçlarını doğrulamak için kullanımı |
|                     | Problemde gözlemlenebilecek matematiksel ilişkiler hakkındaki varsayımların formüle edilmesi ve değerlendirilmesi                        |
|                     | Mantıksal argümanların oluşturulması                                                                                                     |

Bulguları sunulan probleme ait analiz tablosunun epistemolojik düzlem ve oluşumlara ilişkin kısmı Tablo 2’de sunulmuştur. Ek-1’ de araştırmacıların analizler sırasında kullandığı kodlamaya ilişkin tablodan örnek bir kesit sunulmuştur.

**Tablo 2.**

Miras Kalan Tarla Problemi Analiz A priori

| Epistemolojik Düzlem                                         | Semiyotik Oluşum                                                                                                                                                   | Bilişsel Düzlem       |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| <i>Temsil</i>                                                |                                                                                                                                                                    | <i>Görselleştirme</i> |
| Çeşitkenar bir üçgen temsili                                 | Verilen üç farklı uzunluğa bağlı çeşitkenar üçgen çizimi                                                                                                           |                       |
| Geniş açılı üçgen temsili                                    | Kenar uzunluklarına bağlı geniş açılı üçgen çizimi                                                                                                                 |                       |
| Kenarortay temsili                                           | Eş parçalamaya yönelik kenarortay çizimi                                                                                                                           |                       |
| Yükseklik temsili                                            | Alanı hesaplamak için yükseklik çizimi                                                                                                                             |                       |
|                                                              | Köşe noktalarını kullanarak üçgenin ifade edilmesi                                                                                                                 |                       |
|                                                              | Geniş açılı üçgende geniş açının sembolik temsili                                                                                                                  |                       |
|                                                              | Kenarortayın sembolik ifadesi Yüksekliğin sembolik ifadesi                                                                                                         |                       |
|                                                              | Üçgenin alanının sembolik temsili                                                                                                                                  |                       |
| <i>Artefakt</i>                                              | <i>Enstrümantal Oluşum</i>                                                                                                                                         | <i>Oluşturma</i>      |
| Pergel-cetvel ile veya Geogebra ile üçgenin çizilmesi        | Pergel ve cetvel veya Geogebra ile üçgeni oluşturma adımlarının izlenmesi                                                                                          |                       |
| Araç kullanarak yükseklik değerinin hesaplanması             | Kenar orta noktanın pergel, cetvel veya Geogebra ile belirlenmesi                                                                                                  |                       |
| Araç kullanarak üçgenin alanının hesaplanması                | Kenarortayın pergel, cetvel veya Geogebra ile çizilmesi                                                                                                            |                       |
|                                                              | Yüksekliğin pergel, cetvel, Geogebra ile çizilmesi                                                                                                                 |                       |
|                                                              | Alanın bulunmasında Geogebra "alan" aracının kullanılması                                                                                                          |                       |
| <i>Referans</i>                                              | <i>Söylemsel Oluşum</i>                                                                                                                                            | <i>İspatlama</i>      |
| Üçgen eşitsizliği bilgisi                                    | Verilen uzunlukların üçgen oluşturduğunun ifade edilmesi                                                                                                           |                       |
| Üçgenin çizilebilmesi için yeterli ve gerekli eleman bilgisi | Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin çizilebildiğinin ifade edilmesi                                                                                                  |                       |
| Üçgende açı kenar ilişkisi bilgisi                           | Üçgenin geniş açılı olduğunun ifade edilmesi                                                                                                                       |                       |
| Çeşitkenar üçgen bilgisi                                     | Kenarortayın üçgenin alanını iki eş parçaya ayırdığının ifade edilmesi                                                                                             |                       |
| Geniş açılı üçgen bilgisi                                    | Üçgenin bir köşesinden karşı kenara çizilen doğru parçasının tabanda ayırdığı parçaların oranının oluşan üçgenlerin alanları oranına eşit olduğunun ifade edilmesi |                       |
| Kenarortay bilgisi                                           | Üçgenin farklı kenarlarını taban kabul eden hesaplamalar sonucunda alanın değişmeyeceğinin ifade edilmesi ve hesaplamalar gerçekleştirilmesi                       |                       |
| Üçgende alan bilgisi                                         |                                                                                                                                                                    |                       |
| Pisagor Bağntısı                                             |                                                                                                                                                                    |                       |

Tablo 2'de yer alan epistemolojik düzlem sütunu göreve bağlı çizilmesi gereken geometrik şekli, şeklin taşınması gereken matematiksel özellikleri, araca bağlı gerçekleşmesi muhtemel eylemler ve görevde işe koşulacak teorik bilgiyi içermektedir. Oluşum sütunu eyleme yönelik ifadeleri içermekte, görevin tamamlanmasına yönelik adımlardan oluşmaktadır. Bilişsel düzlem sütunu ise öğrencinin matematiksel çalışmasına bağlı olarak verilerin analizi sırasında tamamlanmıştır. Öğrencinin gerçekleştirdiği çizimler, araç kullanımı, söylemler gibi veriler ilgili bileşenle ilişkili olarak bulgular bölümünde tabloya yerleştirilmiştir.

## 2.5. Geçerlik ve Güvenirlik

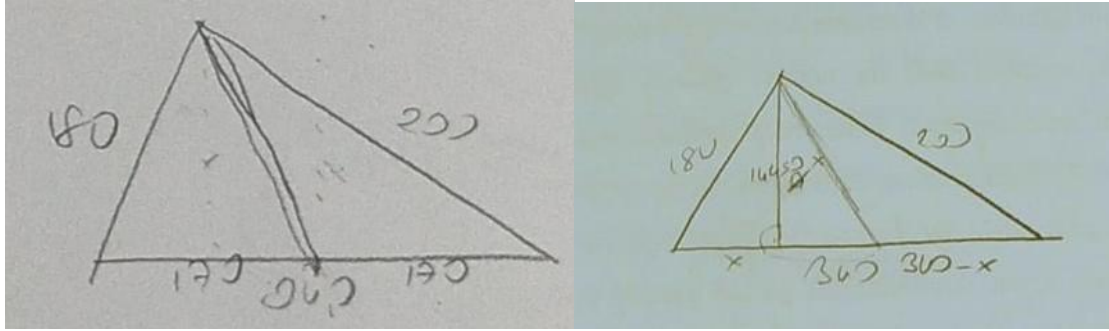
Nitel yaklaşımla gerçekleştirilen bu çalışmada geçerlik ve güvenirlik tutarlılık, tekrar edilebilirlik, inandırıcılık ve aktarılabilirlik ile karşılanmaktadır. Bu kriterler nitel yaklaşımla gerçekleştirilen çalışmalarda geçerlik ve güvenirlik ölçütleri olarak değerlendirilmektedir (Creswell, 2021; Yıldırım & Şimşek, 2006). Araştırmanın yöntemsel çeşitliliği birden fazla veri toplama yöntemi kullanılarak sağlanmıştır. Veri kaynağı çeşitliliği problemlerin çeşitlendirilmesi, farklı cinsiyette ve farklı nitelikte okullara (devlet- özel okul) devam eden öğrencilerin katılımı ile sağlanmıştır. Nitel araştırmalarda inandırıcılık uzun süreli ve yoğun katılım, çeşitleme ile elde edilmektedir (Güler vd., 2015). Araştırmacı dersine girdiği öğrenciler ile toplamda on hafta süren uygulamalar gerçekleştirmiştir. Araştırmada elde edilen bulguların benzer birim, durum ve mekana genellenmesi olan aktarılabilirlik olarak ifade edilmektedir (Akar, 2019). Ülkemizde benzer tanılama sürecinden geçen özel yetenekli öğrencilerin bilişsel yeterliliklerin yakın olduğu ifade edilebilir. Araştırmadan elde edilen bulguların genellenmesi açısından önemli görülmüştür.

### 3. BULGULAR

Bu bölümde Duru'nun matematiksel çalışma uzayıyla ilgili bulgular ortaya çıkan semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar üzerinden sunulmuştur.

#### 3.1. Semiyotik oluşum (Temsiller – Görselleştirme)

Miras Kalan Tarla probleminde temsil bileşenleri verilen üçgen tarlanın kenar uzunluklarına bağlı olarak çeşitkenar, geniş açılı üçgen, problemin çözümü için kenarortay ve yükseklik yardımcı elemanları olarak belirlenmiştir. Duru'nun probleme ilişkin görsel temsilleri incelendiğinde çeşitkenar üçgen temsili oluşturduğu, kenarortayı ve yüksekliği üçgen üzerinde görselleştirdiği belirlenmiştir. Duru'nun manuel çizimleri Şekil 5'te sunulmuştur.



Şekil 5. Duru'nun manuel çizimleri

Duru'nun üçgen çizimi incelendiğinde çizimin çeşitkenar üçgene atıfta bulunduğunu kenarlar üzerine yerleştirdiği sayısal değerlerden belirlenmektedir. Bununla birlikte çizim incelendiğinde kenarların sayısal büyüklüklerinin çizime orantısal olarak aktarılmadığı görülmektedir. Sağdaki çizim incelendiğinde ise öğrencinin çözüme götürecek yardımcı elemanlardan birinin yükseklik olduğunu belirlediği, yüksekliği ve kenar üzerinde ayırdığı parçaların görsel temsilini oluşturduğu belirlenmiştir. Çizilen üçgenlerin köşe noktalarının, kenarortay ve yüksekliğin kenar ile kesiştiği noktaların sembolik temsillerinin kullanılmadığı görülmektedir. Duru'nun yükseklik ve kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarını "a", "x", "340-x" şeklinde cebirsel olarak ifade ettiği görülmektedir. Duru üçgenin alanını hesaplamaya yönelik çalışmalarında Şekil 6'da görüleceği gibi bu cebirsel temsilleri kullanmıştır.

Şekil 6. Duru'nun cebirsel çözüm temsilleri

Öğrencinin çizimlerinden semiyotik oluşum yönelimleri çalışma uzayı içerisinde Tablo 3'teki gibi olmuştur.

**Tablo 3.**

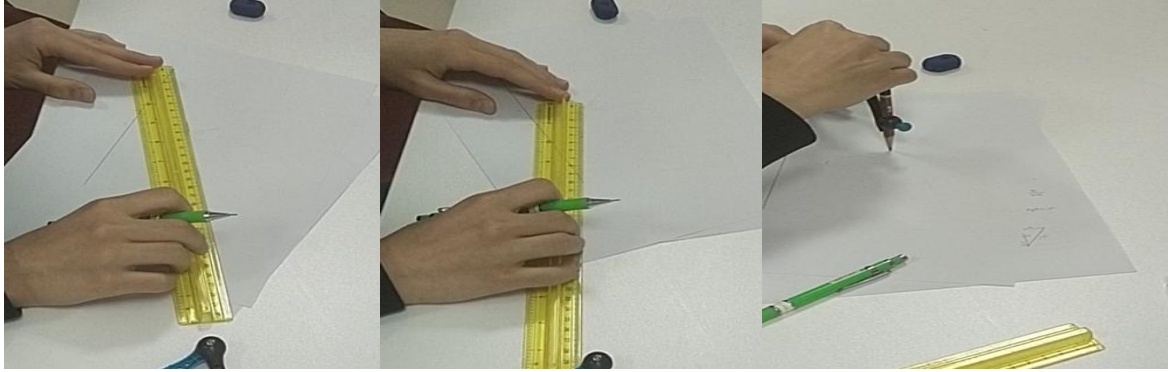
*Duru'nun Çalışma Uzayı Semiyotik Boyut*

| Epistemolojik düzlem         | Semiyotik oluşum | Bilişsel düzlem                                                         |
|------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Çeşitkenar bir üçgen temsili | →                | Çeşitkenar üçgen çizimi<br>Sayısal değerler ile çeşitkenar üçgen çizimi |
| Geniş açılı üçgen temsili    | - - - - -        | -                                                                       |
| Kenarortay temsili           | →                | Birden çok kenarortay çizimi                                            |
| Yükseklik temsili            | →                | Manuel ve araç destekli yükseklik çizimi                                |

Öğrencinin semiyotik oluşumunun epistemolojik → bilişsel düzlem yöneliminde gerçekleştiği, verilen kenar uzunluklarının geniş açılı üçgen olduğuna ilişkin kodun çözümlenemediği belirlenmiştir.  $MWS_{\text{geometri}}$  uzayında tasarlanan göreve ilişkin öğrencinin referans sistemiyle ilişkili şekilde  $MWS_{\text{cebir}}$  uzayına kaydığı görülmüştür.

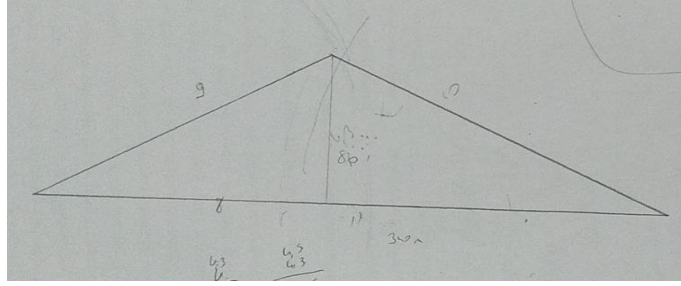
### 3.2. Enstrümantal Oluşum (Artefakt- - Oluşturma)

Problemin epistemolojik düzleme bağlı artefakt bileşeni araçla üçgenin, kenarortayın çizilmesi ve üçgenin alanının hesaplanmasını içermektedir. Beklenen enstrümantal oluşum adımları sırasıyla “üç kenar uzunluğu bilinen üçgeni çizme adımlarının takip edilmesi”, “kenar orta noktanın araçla belirlenmesi ve kenarortayın çizilmesi”, “yüksekliğin araçla çizilmesi ve ölçülmesi” ve son olarak “üçgenin alanının araç yardımıyla hesaplanması” dır. Duru yüksekliği cebirsel işlemler sonucunda belirleyemediği için araç kullanımına yönelmiştir. Üçgenin çizimi için pergel ve cetvel kullanan Duru, problemdeki sayısal verileri 1/20 oranında küçülterek çizim gerçekleştirmiştir. Duru cetvel-pergel ile üç kenarı bilinen üçgen çizme adımlarını izlemiş, kenarortay çizmeden 340 metrelik kenara ait yüksekliği çizerek alan hesaplaması gerçekleştirmiştir. Duru'nun araç kullanımına ait görseller Şekil 7'de sunulmuştur.



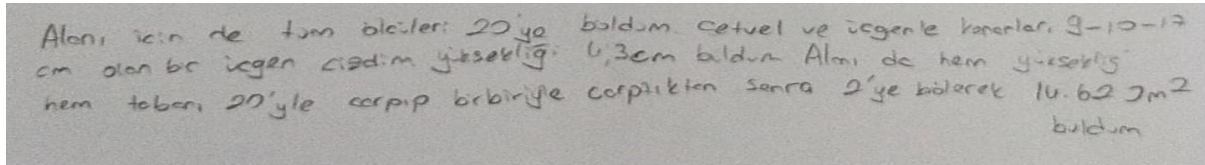
**Şekil 7.** Duru'nun araç kullanma görselleri

Duru cetvelle 17 cm (340 metre) uzunluğundaki kenarı çizmiştir. Sonra pergelle bu kenarın köşe noktalarını merkez kabul eden 10 cm (200 m) ve 9 cm (180 m) yarıçap uzunluğuna sahip çemberleri çizmiştir. Çemberlerin kesişim noktası yardımıyla üçgeni çizmiştir. Enstrümantal oluşum sonucunda öğrencinin gerçekleştirdiği çizim Şekil 8'de sunulmuştur.



Şekil 8. Duru'nun araç kullanımına bağlı çizimi

Şekil 8 incelendiğinde 17 cm uzunluğundaki kenara ait yüksekliğin çizildiği görülmektedir. Duru yüksekliği geometri inşa adımlarına göre değil, cetvelin referans çizgileri gönye gibi kullanılarak çizmiş, ayrıca yükseklik değerini birden fazla kez ölçerek belirlemeye çalışmıştır. Problem çözme oturumunu gerçekleştirdiği gruptan farklı bir yükseklik değeri bulduğu için bu farklılığı da araçla gerçekleştirdiği ölçümün ölçme hatasına sahip olabileceğiyle açıklamaya çalışmıştır: "Belki milimetrik olarak yanlış çizmişimdir. Küçültürüm işlem yaptığım için hani o giderek büyüdükçe bir fark olmuştur belki" şeklinde ifade etmiştir. Duru'nun kenarortay çizimine yönelik inşa adımlarını da kullanmadığı görülmektedir. Duru'nun araç kullanım sürecini aktaran geri bildirim notu Şekil 9'da sunulmuştur.



Alanı için de tüm ölçüleri 20'ye böldüm. Cetvel ve üçgenle kenarları 9-10-17 cm olan bir üçgen çizdim. Yüksekliği 4,3 buldum. Alanı da hem yüksekliği hem tabanı 20'ye çarpıp birbiriyle çarptıktan sonra 2'ye bölerek 14,62 m<sup>2</sup> buldum

Şekil 9. Duru'nun araçla gerçekleştirdiği eylemlere ait geri bildirim notu

Duru'nun enstrümantal oluşum yönelimi Tablo 4'te sunulmuştur.

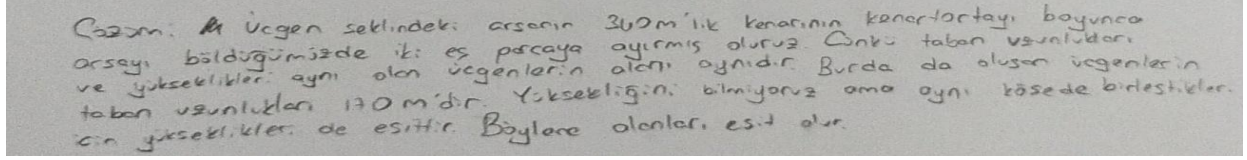
Tablo 4  
Duru'nun Çalışma Uzayı Enstrümantal Boyut

| Epistemolojik düzlem                              | Enstrümantal oluşum | Bilişsel düzlem                                                                                               |
|---------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cetvel-pergel veya Geogebra ile üçgenin çizilmesi | →                   | Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin cetvel-pergel ile geometrik inşa adımlarının izlenmesi                      |
| Kenarın orta noktasının araç ile belirlenmesi     | -----               | -                                                                                                             |
| Kenarortayın araç ile çizilmesi                   | -----               | -                                                                                                             |
| Yüksekliğin araç ile çizilmesi                    | →                   | Cetvelin gönye gibi kullanılarak yüksekliğin oluşum adımlarının izlenmesi<br>Yüksekliğin cetvel ile ölçülmesi |
| Üçgenin alanının araç ile ölçülmesi               | -----               | -                                                                                                             |

### 3.3. Söylemsel Oluşum (Referanslar- İspatlama)

Problemin a priori analizinde işe koşulan çözüme yönelik referans yapı referans MWS gözetilerek üçgen eşitsizliği, üçgenin çizilebilmesi için yeterli ve gerekli eleman bilgisi, üçgende açı kenar ilişkisi, çeşitkenar üçgen, geniş açılı üçgen, kenarortay, üçgende alan, Pisagor Bağıntısı ile ilişkilendirilmiştir. Duru'nun çalışma uzayı kullanılan teorik yapı için incelendiğinde tarlayla temsil edilen üçgenin çeşitkenar olarak

yapılandırıldığı görülmüştür (Bkz. Şekil 5). Epistemolojik düzlemde farklılaşarak verilen kenar uzunluklarının dik açılı özel üçgen olma durumunu kontrol etmiştir. Buna karşılık verilen uzunlukların geniş açılı bir üçgen oluşturduğu bilgisini yapılandıramamıştır. Üçgenin alanının iki eş parçaya ayrılması için çizilmesi beklenen yardımcı elemanın kenarortay olduğunu bilerek çözüm geliştirmiştir. Duru'nun söylemsel oluşuma ait geri bildirim notu Şekil 10'da sunulmuştur.



Çözüm: Üçgen şeklindeki arsanın 340 metrelik kenarının kenarortayı boyunca arsayı böldüğümüzde iki eş parçaya ayırmış oluruz. Çünkü taban uzunlukları ve yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanı aynıdır. Burda da oluşan üçgenlerin taban uzunlukları 170 m'dir. Yüksekliklerini bilmiyoruz ama aynı köşede birleştikleri için yükseklikleri de eşittir. Böylece alanları eşit olur.

Şekil 10. Duru'nun geri bildirim notu

Geri bildirim notu incelendiğinde Duru'nun kenarortayın eş taban ve yükseklik değerine bağlı üçgenin alanını eş iki üçgensel bölgeye ayırdığına yönelik muhakeme gerçekleştirdiği görülmektedir. Bunun yanı sıra üçgenin yükseklik değerinin hesaplanamayacağını ifade etmiştir. Şekil 5 ve Şekil 6'da sunulan çizim ve cebirsel çözüm adımları incelendiğinde üçgenin alanını hesaplamak için sadece 340 metrelik kenarı ve bu kenara ait yüksekliği belirlemeye yönelik eylemler gerçekleştirdiği görülmektedir. Şekil 5'teki çizimden sonra öğrenci Pisagor Bağıntısı kullanarak yükseklik ve yüksekliğin tabanda ayırdığı parçanın uzunluğunu belirlemeye çalışmıştır. Şekil 11'de Duru'nun Pisagor Bağıntısı'nı kullanarak yazdığı denklem verilmiştir.



Şekil 11. Pisagor Bağıntısı'nın kullanımını içeren denklem

Duru bu denklemi yazdıktan sonra iki bilinmeyenli bir denklemle karşılaştığı için çözüme götürmeyeceğini düşünerek üzerini çizmiştir. Üçgen içerisinde oluşan ikinci dik üçgenin Pisagor bağıntısı için denklem oluşturmamıştır. Bunun yerine Şekil 6'da verilen alana bağlı denklemleri işe koşturmuştur. Üçgenin alanını yüksekliğin üçgende ayırdığı iki üçgenin alanının toplamı ile hesaplamaya çalışmıştır. Hatalı gerçekleştirdiği denklem çözümü sonucunda bu çözüme devam etmemiştir. Duru'nun söylemsel oluşum yönelimi Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5.

*Duru'nun Çalışma Uzayı Söylemsel Boyut*

| Epistemolojik düzlem                                         | Söylemsel oluşum | Bilişsel düzlem                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Üçgen eşitsizliği bilgisi                                    | -----            | -                                                                                                                                                   |
| Dik açılı özel üçgenler bilgisi                              | —————→           | Verilen kenar uzunluklarının özel üçgen için kontrol edilmesi                                                                                       |
| Üçgenin çizilebilmesi için yeterli ve gerekli eleman bilgisi | —————→           | Üç kenarı bilinen üçgenin tek bir üçgen oluşturduğu bilgisiyle üçgen çizimlerinin gerçekleştirilmesi                                                |
| Çeşitkenar üçgen bilgisi                                     | —————→           | Üçgenin çizimlerinde yükseklik ve kenarortayın farklı doğru parçaları ile temsil edilmesi                                                           |
| Geniş açılı üçgen bilgisi                                    | -----            | -                                                                                                                                                   |
| Kenarortay bilgisi                                           | —————→           | Kenarortayın üçgeni tabanları ve yükseklikleri eşit iki üçgene ayırdığının ifade edilmesi                                                           |
| Üçgende alan bilgisi                                         |                  | Üçgenin alanını hesaplamaya ait (taban uzunluğu x yükseklik)/2 ilişkisinin kullanılması                                                             |
| Pisagor Bağıntısı                                            | -----→           | Yüksekliğin çizilmesi ile oluşan dik açılı üçgenlerde parçaların uzunluklarının hesaplanması amacıyla Pisagor bağıntısıyla cebirsel çözüm işlemleri |

Duru araç desteğiyle yüksekliği hesaplamadan önce kenarortay ve alan ilişkisini yapılandırmıştır (Bkz. Şekil 10). Öğrencinin üçgenin alanının referans MWS'ye uygun olarak yükseklik ve taban uzunluğu niceliklerine bağlı olduğu bilgisine sahip olduğu belirlenmiştir. Verilen kenar uzunluklarının geniş açılı bir üçgen oluşturduğunu fark etmemiş bunun yanı sıra bu kenar uzunluklarının tek bir üçgene atıfta bulunduğu bilgisini kullanmıştır. Pisagor bağıntısını beklenildiği gibi kullanmayı denemiş ancak cebirsel işlemlerde başarılı olamamıştır. Pisagor bağıntısını kullanmayı denediği hâlde cebirsel işlem hataları nedeniyle çözümü sürdürememiştir. Bu durum çalışma uzayındaki dolaşımın söylemsel bileşende kesintiye uğradığını göstermektedir. Duru sayısal cevaba ulaşamadığı halde söylemde bulunmuş, daha sonra araçsal çözüm gerçekleştirmiştir.

#### 4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada diğer disiplinlerden soyut yapısıyla ayrılan matematiksel çalışmayı açıklayan MWS Teorisi'nin kavramsal çerçevesinin gerçek bir çalışma süreci üzerinden nasıl kullanılabileceği ortaya konmaya çalışılmış ve teorinin temel bileşenleri literatür üzerinden tanıtılmıştır. Teorinin bileşenleri ve işlevleri, tamamlanmış bir çalışma uzayı ortaya çıkarma potansiyeli olan görev tasarımı ile özel yetenekli bir öğrencinin çalışma uzayı üzerinden somutlaştırılmıştır.

Semiyotik oluşumun incelenmesi, Duru'nun üçgen, kenarortay, yükseklik çizimlerine yeni bir bakış açısı kazandırmış, çizimlerin matematiksel arka planını ve öğrencinin bu çizimlere yaklaşımını göstermesi açısından önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Duru'nun çizdiği üçgenler her ne kadar tabanı üzerinde prototip sayılacak nitelikte olsa da kenarlar üzerine yerleştirdiği sayısal değerlerle çeşitkenar üçgenin matematiksel özelliğini yansıtmaktadır. Duru'nun çeşitkenar üçgeni görsel imajı ile aktarmadığı, ancak kenarortay ve yüksekliği iki ayrı doğru parçası olarak çizerek ifade ettiği belirlenmiştir. Yüksekliği hesaplamaya yöneldiği için sonraki çizimlerinde kenarortaya yer vermemesi, Duru'nun seçici bir görsel temsil kaydı oluşturduğuna işaret etmektedir. MWS içerisinde bu durum referans sisteminin aktif olduğu bir görselleştirmeyi ortaya çıkarmaktadır. Duval (1999) görselleştirmenin matematiksel hipotezlerden başladığını, görme eylemine indirgenmemesi gerektiğini ifade etmektedir. Duru'nun görselleştirmesi bu

açıklamayı doğrulamakta, çizimlerin sezgisel bir dayanaktan fazlası olduğunu, matematiksel nesneler olarak kullanıldığını göstermektedir. Semiyotik oluşumun temsil bileşeninin temsil ettiği nesne ve ilişkiyi somut ve elle tutulur hale getirmesini (Kuzniak vd., 2022) doğrulamaktadır.

MWS içerisinde önemli süreçlerden biri enstrümantal oluşumdur. MWS'nin erken dönemlerinden itibaren matematiksel çalışmanın bir bileşeni olarak kabul edilen araç kullanımı (Kuzniak, 2011) güncel program ile ülkemiz matematik eğitiminde görünür hale gelmiştir. Türkiye'de 2024-2025 yılında uygulanmaya başlayan Maarif Modeli Öğretim Programı matematik dersi alan becerilerinden birinin "matematiksel araç ve teknoloji ile çalışma" olması bu duruma işaret etmektedir (MEB,2024). Araçların çizim, ölçüm yapmak, demonstrasyon gibi belirgin işlevleri olduğu bilinmekle birlikte, Maarif Modeli içinde öğretim sürecinin temel bileşeni olarak matematiksel anlamının kalbinde yer almaktadır. Benzer biçimde MWS artefaktların öğretmen ve öğrencilerin kavramsallaştırmalarında rolünü incelemiş, didaktik mühendislik ürünü olarak işe koşturmuştur (Lagrange & Richard, 2022). Duru'nun araç kullanım yaklaşımı özelinde değerlendirme yapılırsa araç kullanım yaklaşımının farklılaştığı görülmektedir. Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin cetvel-pergel ile inşa adımları kavramsal bir anlamayı içermektedir. Bu sonuç 2018 programında araç kullanımını içeren sınırlı sayıda kazanımdan biri ve araştırmacının destek eğitiminin bir sonucu olarak yorumlanabilir ve MWS'nin enstrümantal oluşuma yönelik yaklaşımını desteklemektedir. Yüksekliğin ölçülmesi aracın en temel işleviyle ilişkilidir. Bu durum, aracın bir çalışmada farklı amaçlara hizmet ettiğini de ortaya koyması bakımından önemlidir. Matematik eğitiminde enstrüman gerçekleşen eylemin türüne göre bir eylem aracı olarak farklı türlerde değerlendirilmektedir (Özdemir- Erdoğan, 2016). MWS'nin sahip olduğu enstrümantal oluşum ayağı araç kullanımını içeren öğretim sürecinin karmaşıklığını açıklamak için uygun bir yapı sunmaktadır. Bu yapı ayrıca içinde bulunduğumuz dijital çağın matematik eğitime yansımaları açıklamak için bir perspektif sunmaktadır (Flores-Salazar vd., 2022). Enstrümantal oluşum sonucunda bireyin düşünme biçimi ve buna bağlı olarak matematiksel bilginin dönüşmesi beklenir (Lagrange & Richard, 2022). Duru'nun araçla gerçekleştirdiği eylemlerin bu dönüşümü ne ölçüde sağladığı ise çalışma uzayının tutarlılığı açısından kritik bir noktadır.

Miras Kalan Tarla probleminin çözümünde kullanılacak okul paradigmasına bağlı referans yapı, problemin çözümü için gerekli olan ve çalışma sürecinin sonunda elde edilmesi beklenen söylemsel oluşum durumları tanımlanmıştır. MWS'nin söylemsel boyutu bir görevin gerektirdikleri ve gerçekte ortaya çıkan sonucu değerlendirmek için her göreve uyarlanabilen teorik ve pratik farkı ortaya çıkaran esnek bir yapı ortaya koymaktadır (Kuzniak, 2022). Analizler sonucunda, Duru'nun geniş açılı üçgene ait bilgiyi kullanmadığı belirlenmiştir. Kenarortay, yükseklik, alan ilişkisine ait oluşumlar gerçekleşirken üçgenin alanının farklı kenarlar üzerinden hesaplanabileceğine yönelik oluşum gözlemlenmemiştir. Bu analiz öğrencinin bilgiye sahip olup olmamasından daha derinlikli bir bakış açısı kazandırmıştır. Duru'nun çalışma uzayına ait oluşumlar epistemolojik→bilişsel yöneliminde ortaya çıkmıştır. Öğrencinin özel yetenekli olmasının bu durum üzerinde belirleyici olduğu ifade edilebilir. Ayrıca Duru'nun çalışma uzayının yönelimlere ilişkin analizi dolaşımın kesintiye uğradığı çalışmanın karakterinin değiştiği noktaları ortaya çıkarmıştır. Pisagor bağıntısı ve üçgenin alan bilgisini esas alan referanstan ispatlamaya doğru gerçekleşen çalışmanın tamamlanmadığı görülmüştür. Duru'nun Pisagor bağıntısını kullanmayı denediği hâlde cebirsel işlem hataları nedeniyle çözümü sürdürememesi, söylemsel oluşumun erken aşamada tıkanıldığını göstermektedir. Duru bu ilişkilere bağlı cebirsel çözümde öğretmen desteğine ihtiyaç duymuştur. Öğrenciye denklemin çözümünde gerekli ve yeterli desteğin sağlanması çalışmanın başladığı doğrultuda gerçekleşmesi için önemlidir. Espinoza-Vásquez vd., (2024) Tales teoremi üzerine gerçekleştirdikleri çalışmayla öğrencilerin geometri görevlerinde çalışma karakterlerini incelemişlerdir. Araştırma öğrencilerin teoremi sayısal ve cebirsel eksende ele aldıklarını ve araçla çalışma davranışlarının sınırlı kaldığını ortaya çıkarmıştır. MWS kapsamında gerçekleştirilen çalışma öğrenci çalışma karakterlerinin belirlenmesi yanı sıra öğretmenin sınıf içi uygulama pratiklerini ortaya koyması bakımından dikkat çekicidir. Kişisel çalışma uzaylarının analizleri öğrenme engelleri, kavram yanılgıları,

hataları ortaya çıkarmaktadır. Bunun sonucunda öğrencinin yaşadığı zorluklar belirlenebilmekte ve tutarlı bir uyumlu bir MWS için olanak sağlamaktadır (Menares-Espinoza & Vivier, 2022).

Şekilsiz geometri problemleri için tasarlanan Miras Kalan Tarla problemi referans ve uygun MWS esas alınarak geometri özelinde epistemolojik beklentiler ortaya çıkarmıştır. Duru'nun çalışma uzayı MWSgeometri olarak gerçekleşmiştir. Pisagor bağıntısına bağlı olarak MWScebir ve alanın hesaplanmasına bağlı MWSaritmetik kapsamında dolaşım gerçekleştiği, teorinin dış fibrasyon olarak tanımladığı dolaşımın gerçekleştiği belirlenmiştir. Matematiksel çalışmada matematiğin alanlarının kendi içinde ilişkilendirilmesini ortaya koyması bakımından önemlidir (Kuzniak vd., 2022). Lagrange & Laval (2023)'ın lise düzeyinde gerçekleştirdikleri çalışma algoritmik ve matematiksel düşünmenin araçsal ve söylemsel boyutlarda birbirini desteklediğini ortaya koymuştur. Araştırma referans uzaya bağlı teorik yapının kişisel çalışma uzayına yansması ve kurumsallaşmasında öğretmen desteğinin önemini ortaya koymaktadır. Benzer şekilde bu araştırma referans, uygun ve kişisel çalışma uzayları arasındaki boşlukları görünür kılmış; özellikle cebirsel çözüm aşamasında öğrencinin uygun MWS'den uzaklaşarak kişisel MWS'ye özgü bir yapı sergilediği belirlenmiştir. Bu tür boşlukların öğretimsel düzenlemeler için kritik birer gösterge olduğu, literatürde MWS'nin sınıf içi analizler için tercih edilmesinin temel nedenlerinden biri olarak vurgulanmaktadır (İmamoğlu vd., 2023; Panqueban vd., 2024).

Bu çalışma, MWS'nin gerçek bir görev üzerinden uygulanmasının, yalnızca teoriyi açıklamakla kalmayıp, öğrencilerin gerçek çalışma uzaylarını çözümlemede güçlü bir analitik yapı sunduğunu göstermektedir. Bununla birlikte teori, literatürde de belirtildiği gibi (Kuzniak vd., 2016a), bütüncül olarak değil, bileşenlerinin etkileşimi üzerinden kullanılmalıdır. Bu doğrultuda çalışma, MWS'nin teoriler arası bağ kurabilen esnek yapısına (Kuzniak & Vivier, 2019; Artigue, 2016) uygun bir kullanım örneği sunmaktadır.

Sonuç olarak MWS, gerek görev tasarımı gerek a priori-posteriori analiz süreçleri, gerekse kişisel çalışma uzaylarının değerlendirilmesi açısından Türkiye'deki matematik eğitimi araştırmalarına önemli katkılar sunabilecek bir yaklaşımdır. Gelecek araştırmalarda farklı matematik alanlarında, farklı sınıf seviyelerinde ve farklı öğretim bağlamlarında MWS'nin denenmesi ve çalışma uzaylarının karşılaştırmalı olarak analiz edilmesi önerilmektedir.

## Kaynakça/Reference

- Akar, H. (2019). Durum çalışması. İçinde A. Saban ve A. Ersoy (Ed.), *Eğitimde nitel araştırma desenleri* (ss. 139-177). Anı yayıncılık.
- Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0810-z>
- Barrera, R.(2013, February 6-10). *On the geometrical meanings of multiplication: geometrical work space, semiotic mediation and students' chosen paths* [Paper Presentation]. Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Türkiye.
- Creswell, J. W. (2021). *Nitel araştırma yöntemleri, beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni*. (S.B. Demir & M.Bütün, Çev., 6.Baskı). Siyasal Kitapevi. (Orijinal yayın tarihi 2013).
- Delgadillo, E. M., Viola, F., & Vivier, L. (2017, February 1-5). *Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching* [Paper presentation]. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10), Dublin, Ireland.
- Deniz, S. (2024). *Eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik öğrencilerin bilişsel süreçlerinin matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinde incelenmesi*. [Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi]. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/>
- Derouet, C., & Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions?. *ZDM*, 48(6), 757-773. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0769-9>
- Derouet, C., Kuzniak, A., Nechache, A. , Parzysz, B., & Vivier, L. (2017, February 1-5). *The mathematical working space model: an open and adaptable theoretical framework?* [Paper presentation]. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10), Dublin, Ireland.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education* (pp. 142-157). Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Springer.
- Duval, R. (1999, October 23-26). *Representations, vision and visualization: Cognitive functioning in mathematical thinking* [Paper presentation]. Proceedings of the North America chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Morelos, Mexico.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., & Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM*, 48(6), 895-907. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0780-1>
- Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R., & Verdugo-Hernández, P. (2024). Teaching Thales's theorem: relations between suitable mathematical working spaces and specialised knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10367-9>

- Flores- Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical work in the digital age. Variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 165-209). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8)
- Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., & Michael-Chrysanthou, P. (2016). Fostering representational flexibility in the mathematical working space of rational numbers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 287-307. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a14>
- Gómez-Chacón, I. M. & Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 201-226. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9462-4>
- Güler, A., Halıcıoğlu, M. B., & Taşgın, S. (2015). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri teorik çerçeve – pratik öneriler 7 farklı nitel araştırma yaklaşımı – kalite ve etik hususlar* (2. baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A., & Masselin, B. (2022). The idone or suitable mws as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 121-146). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6)
- Hitt, F., Saboya, M., & Cortés Zavala, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM*, 48 (6), 775-791. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5>
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283-312. <https://doi.org/10.1023/A:1003851228212>
- İmamoğlu, Y., Özcan, Z. Ç., Pesen, M., & Erkin, E. (2023). Bir geometri öğretimi dersinin geometrik çalışma düzlemleri modeline göre incelenmesi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 40-2(2), 101- 118, <https://doi.org/10.52597/buje.1128602>
- Karahan, V. (2021). *İlkokul ve ortaokul matematik ders kitaplarındaki temel geometrik kavramların incelenmesi* [Yüksek Lisans tezi, Rize Üniversitesi]. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/>
- Kuzniak, A., & Masselin, B. (2024). Strongly didactic contracts and mathematical work. *Educational Studies in Mathematics*, 115(2), 289-312. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10286-1>
- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: A study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational studies in Mathematics*, 77(1), 129-147. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9304-7>
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces— theoretical characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 3-31). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>

- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2015, February 4 – 8). *Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry* [Paper presentation]. *Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, Prague, Czech Republic.
- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2017, February 1-5). *On dialectic and dynamic links between the Mathematical Working Space model and practice in the teaching and learning of mathematics* [Paper presentation]. *Proceeding of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)*, Dublin, Ireland.
- Kuzniak, A., & Vivier, L. (2019, February 6-10). *An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the mathematical working space theory* [Paper presentation]. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*. Utrecht, Netherlands.
- Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J. P. (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, 48, 861-874. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0>
- Kuzniak, A., Nechache, A. & Richard, P. R. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces in Brief. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 57-69). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_3)
- Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016a). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48, 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Lagrange, J. B., & Laval, D. (2023). Connecting algorithmics to mathematics learning: a design study of the intermediate value theorem and the bisection algorithm. *Educational Studies in Mathematics*, 112(2), 225-245. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10192-y>
- Lagrange, J.B. & Richard, P.R. (2022). Instrumental Genesis in the theory of mws: insight from didactic research on digital artifacts. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 211-228). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9)
- Menares-Espinoza, R., & Vivier, L. (2022). Personal Mathematical work and personal MWS. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 91-120). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5)
- Milli Eğitim Bakanlığı (2017). Çocuk gelişimi ve eğitimi üstün zekâlılar ve özel yetenekliler. [http://megep.meb.gov.tr/mte\\_program\\_modul/moduller/%C3%9Cst%C3%BCn%20Zek%C3%A2l%C4%B1lar%20ve%20%C3%96zel%20Yetenekliler.pdf](http://megep.meb.gov.tr/mte_program_modul/moduller/%C3%9Cst%C3%BCn%20Zek%C3%A2l%C4%B1lar%20ve%20%C3%96zel%20Yetenekliler.pdf)
- Milli Eğitim Bakanlığı (2024, Eylül). Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Ortak Metni. <https://tymm.meb.gov.tr/upload/brosur/2024programortakmetinOnayli.pdf>
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J., & Mena-Lorca, A. (2016). Estabilidad epistemológica del profesor debutante y espacio de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 188-203. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a09>
- Moutet, L. (2018, December, 13-18). *Le cadre théorique de l'ETM étendu: Potentialités en physique et en chimie* [Paper presentation]. *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (ETM6)*, Valparaíso, Chile.
- Moutet, L. (2019, February 6-10). *The extended theoretical framework of mathematical working space (extended MWS): Potentialities in physics* [Paper presentation]. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, Utrecht, Netherlands.

- Moutet, L. (2021). The extended theoretical framework of mathematical working space (extended MWS): potentialities in chemistry. In F.K.S Leung, G.A. Stillman, G.Kaiser & K. L. Wong, (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west. international perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 631-640). Springer
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique Et De Sciences Cognitives*, 19, 67–90.
- Nechache, A., & Gómez-Chacón, I. M. (2022). Methodological aspects in the theory of mathematical working spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 33-56). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_2)
- Özdemir-Erdoğan, E. (2016). Enstümantal oluşum teorisi. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (1.Basım ss. 803-818). Pegem Yayıncılık.
- Panero, M., Arzarello, F., & Sabena, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: Teachers' practices with the idea of "generic". *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 265-286. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a13>
- Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C., & Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6) em2450. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14588>
- Pérez, K. M., & Delgadillo, E. M. (2022). The mathematical work of Chilean secondary teachers in the domain of probability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 558-575. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00235-0>
- Pluvinae, F., & Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los enteros. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 120-141. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a06>
- Psycharis, G., Kafetzopoulos, G. I., & Lagrange, J. B. (2021). A framework for analyzing students' learning of function at the upper-secondary level: Connected working spaces and abstraction in context. In *Mathematics Education in the Digital Age* (pp. 150-167). Routledge.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. HAL Id: hal-01017462
- Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, 48, 925-933. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0811-y>
- Richard, P. R., Oller-Marcén, A. M., & Meavilla-Seguí, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM*, 48, 843-859. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9>
- Richard, P.R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Chapitre 7. Issues and challenges about instrumental proof. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Cham: Springer International Publisher. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7)

- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the mathematical working space framework. *ZDM*, 48, 827-842. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0>
- Van Tassel-Baska, J., & Stambaugh, T. (2008). Curriculum and instructional considerations in programs for the gifted. In S. I. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices* (pp. 347-365). Springer.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (5. baskı.). Ankara.

## EXTENDED ABSTRACT

### 1. INTRODUCTION

In mathematics education, shifting students from the role of passive learners to that of researchers exploring the field and novice mathematicians forms an important basis of contemporary educational approaches (Kuzniak, Tanguay, and Elia, 2016). This approach transitions students from a position of knowing mathematics to one of actively doing mathematics. The fact that mathematical work involves a cognitive dimension interrelated with an epistemological dimension, dependent on the individual performing, makes understanding this complex structure challenging (Kuzniak, Tanguay, and Elia, 2016). To explain this intricate nature of mathematical work and to understand the difficulties encountered in educational settings, Kuzniak and colleagues initially proposed the Geometric Working Space approach, which was subsequently expanded into the Mathematical Working Spaces (MWS) theory (Houdement and Kuzniak, 1999; Kuzniak and Rauscher, 2011). While the Mathematical Working Spaces (MWS) theory has found a broad application area, particularly in French- and Spanish-speaking countries, studies conducted in the context of Türkiye remain limited (Deniz, 2024; İmamoğlu et al., 2023; Karahan, 2021). However, moving beyond being a mere synthesis of its underlying theories, MWS offers a multidimensional framework that enables the epistemological and cognitive analysis of both a genuine working environment and mathematical content. Within this structure, students' mathematical actions can be elucidated through representations, the use of tools, and discourse (Kuzniak, 2011; Radford, 2016).

When the evolution of mathematics curricula in Türkiye toward a competency-based structure is considered alongside the emphasis on representation, tool use, and reasoning processes in mathematical activities, addressing the MWS approach within this context becomes particularly significant. Based on the aforementioned points, the aim of this study is to increase the visibility of the Mathematical Working Spaces (MWS) theory within domestic literature and to articulate the role of its constituent concepts in mathematical work through the lens of a working space. To this end, the study aims to uncover the cognitive and epistemological planes, as well as the geneses occurring between these planes, through specialized geometric tasks administered to gifted students.

### 2. METHOD

This study was conducted using a qualitative design. The research process followed the steps of determining the mathematical task to be used as a data collection tool, performing the a priori analysis of the problem, data collection, and conducting a posteriori analyses. To ensure complete circulation across the MWS planes, geometric tasks that do not contain figures were utilized in the study. Since the designed task requires high-level cognitive competence and to obtain rich data, the research was carried out with 8th-grade gifted students. To present mathematical work as a holistic process, the analysis of data belonging to a selected student is provided. The research data were gathered through the student's worksheet for the "Inherited Field" problem, observation forms from the problem-solving session, video recordings, and interviews. The a priori analysis of the research problem was performed within the framework of expectations linked to the epistemological plane. Data analysis was executed through posteriori analyses. Duru's orientations toward the epistemological-cognitive geneses were revealed across semiotic, instrumental, and discursive dimensions.

### 3. FINDINGS, DISCUSSION AND RESULTS

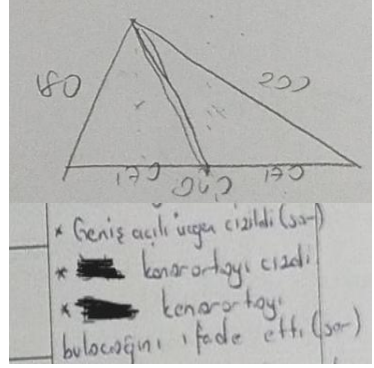
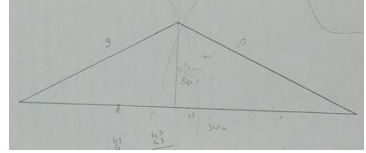
Upon examining Duru's working space, findings regarding the components of the cognitive and epistemological planes, as well as the interactions between these components, were obtained. The research data revealed that Duru's orientations in semiotic, instrumental, and discursive dimensions occurred from the epistemological plane toward the cognitive plane. These results substantiated the cognitive and epistemological nature of a genuine mathematical work—as defined through MWS concepts—within the specific context of Duru's work. In the case of the "Inherited Field" problem, the semiotic dimension of

MWS unveiled the student's representational and conceptual competence regarding triangles and their auxiliary elements. The visualization products confirmed that the student generated selective representational registers. Furthermore, the instrumental dimension of MWS enabled the student to construct her solution within the working space. Working with mathematical tools and technology has emerged as a prominent competency within the Maarif Model Curriculum in our country (MEB, 2024). It can be argued that examining the functions of working with tools—such as drawing, measuring, seeking proof, and exploring—is essential for revealing the role of tools in mathematical work. MWS theory investigates the role of tools in the conceptualization processes of teachers and students, employing artifacts as products of didactic engineering (Lagrange & Richard, 2022). Consequently, the instrumental genesis dimension of MWS provides a suitable framework for explaining the complexity of the teaching process involving tool use. It offers an appropriate infrastructure to account for the reflections of the current digital age on mathematics education (Flores-Salazar, Gaona, & Richard, 2022). Furthermore, the discursive dimension of MWS presents a flexible structure adapted to mathematical tasks, revealing the interaction between task requirements and student outcomes (Kuzniak, 2022). Analyses indicated that Duru did not utilize all the information pertaining to the epistemological plan of the task. Although the orientation of discursive genesis occurred from the bottom up, it was determined that there were points where circulation was interrupted. These ruptures in the circulation of discursive genesis highlighted the specific areas where the student required support in her mathematical work. Detailed analyses of personal working spaces hold the potential to uncover obstacles in the learning environment. Identifying the difficulties experienced by the student facilitates the establishment of a coherent and harmonious MWS (Menares-Espinoza & Vivier, 2022).

The research was structured around geometric problems. Duru's working space manifested primarily in the domain of geometry, though it also extended into algebra and arithmetic. A circulation identified by MWS as external fibration occurred. This is significant in terms of revealing the intra-mathematical connections between different domains of mathematics within a mathematical work (Kuzniak et al., 2022). The study results demonstrate that MWS provides a robust analytical framework for deconstructing genuine mathematical work through semiotic, instrumental, and discursive dimensions. It can be argued that the theory offers a powerful structure that enables teachers to determine the potential of the tasks they bring to the classroom and to analyze the outcomes of their implementation. It was observed that each dimension of the model proposed by the theory allows for in-depth study. Furthermore, MWS possesses a flexible nature that can be effectively integrated with various other theories (Kuzniak & Vivier, 2019; Artigue, 2016).

In summary, Mathematical Working Spaces (MWS) is an approach that can offer significant contributions to mathematics education research in Türkiye in terms of task design, the analysis of mathematical work, and the evaluation of the teaching process across various dimensions. It is recommended that future research implement the MWS framework within different mathematical domains, at various grade levels, and across diverse instructional contexts.

## Ek 1. Analiz Kodlamaları

| Epistemolojik Düzlem Eylem                                             | Yönelim | Bilişsel Düzlem Eylem                                                                      | Çizimler- Diyalog- Gözlem notu                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Çeşitkenar üçgenin kodunun çözülmesi<br>Kenarortayın kodunun çözülmesi | →       | Çeşitkenar formda üçgen çizimi<br><br>Kenarortay çizimi                                    |                                                                                                                                                                                                    |
| Geniş açılı üçgenin kodunun çözülmesi                                  | -----   | Öğrenci verisi yok                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Kenarortay bilgisi                                                     | →       | <b>Kenarortay çizimi</b>                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Üçgende yükseklik bilgisi                                              |         | Çeşitkenar üçgen için kenarortay ve yüksekliğin farklı doğru parçaları temsili             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Üçgende alan bilgisi                                                   |         | Üçgende alan hesaplaması için yükseklik inşa edilmesi                                      | Duru: burada Coşan Dere ile ortak olan kenardan kesmemizi istiyor. Oradan bölmemizi istiyor. Oradan karşı köşeye bir çizgi çektim. Kenarortayı olacak şekilde. O kenarın böylece hem tabanları eş oluyordu hem de yükseklikleri eş oluyordu. Yani alanları aynı oluyordu üçgenlerin.  |
| Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin inşa bilgisi                         | →       | Cetvel ve pergelle üçgenin inşa edilme adımlarının izlenmesi                               |                                                                                                                                                                                                   |
| Üçgenin çizilebilmesi için yeterli ve gerekli elaman sayısı bilgisi    |         |                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Üçgende alan bilgisi                                                   | →       | Üçgenin alanının hesaplanması için yükseklik ve tabanın cebirsel temsiliinin oluşturulması | Duru: önce şey iki değer verdim a ve x olarak<br>Araştırmacı: a ve x nedir<br>Duru: a üçgenin yüksekliği, x d o yükseklikten çizgi indirdiğimizde oluşan dik üçgenin alt kenarı.<br>Duru: Bir üçgenin herhangi bir kenarından çizilen kenarortayı üçgeni alanları eşit 2 üçgene böler |

## ARAŞTIRMANIN ETİK İZNİ

Bu çalışmada “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması gerektiği belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

### Etik kurul izin bilgileri

Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı: Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu

Etik değerlendirme kararının tarihi: 31.10.2023

Etik değerlendirme belgesi sayı numarası: 627137

## ARAŞTIRMACILARIN KATKI ORANI

1. Yazarın araştırmaya katkı oranı %60, 2. Yazarın araştırmaya katkı oranı %40'dir.

Yazar 1: Araştırmanın tasarlanması, veri analizi, raporlaştırma.

Yazar 2: Yöntemin belirlenmesi, danışmanlık, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları.

## ÇATIŞMA BEYANI

Araştırmada herhangi bir kişi ya da kurum ile finansal ya da kişisel yönden bağlantı bulunmamaktadır.